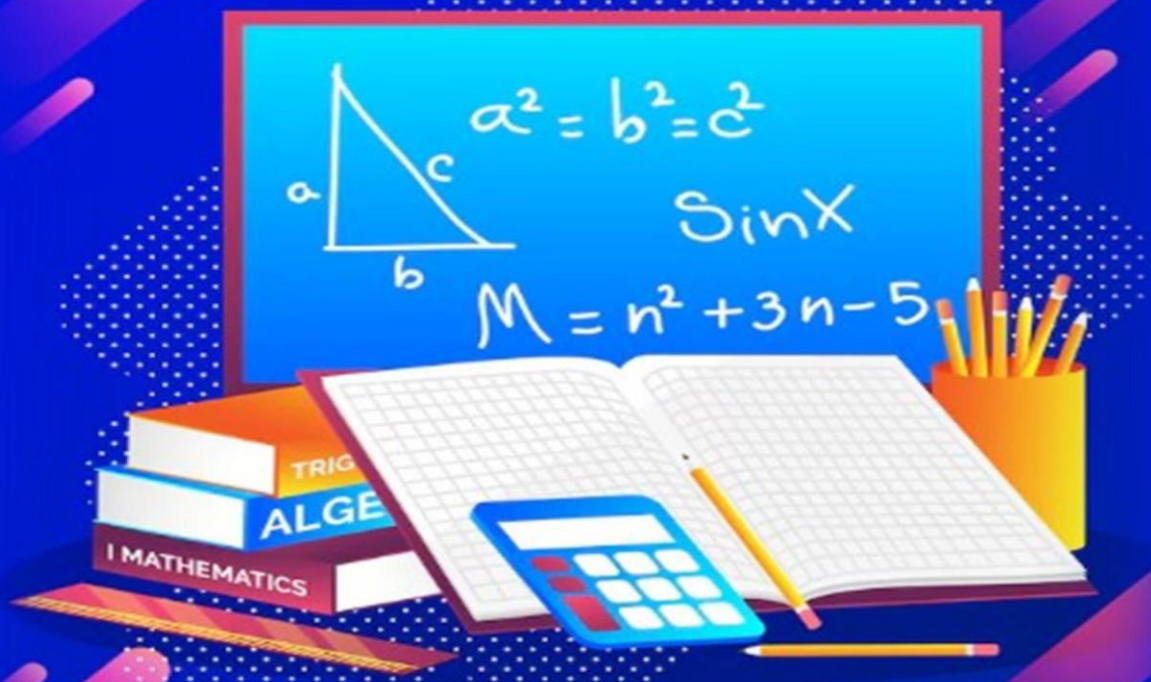
Algèbre

8è Année

CONFORME AU PROGRAMME NATIONAL

EDITION 2025



designed by freepik



a

TABLE DE MATIERE

Préliminaires 1

1. Avant-propos 1

2. Comment utiliser ce manuel 📝 2

3. Socle de compétences visées 🎯 4

- Compétence 1 : Modéliser et Résoudre avec les Ensembles de Nombres 4
- Compétence 2 : Manipuler et Transformer des Expressions Algébriques 5
- Compétence 3 : Résoudre des Problèmes à l'aide d'Équations et d'Inéquations 5
- Compétence 4 : Analyser des Relations Fonctionnelles Simples 6

Chapitre 1 : Les Ensembles de Nombres 🔢 10

1.1. L'Ensemble des Nombres Naturels (ℕ) 10

- 1.1.1. Définition et Représentation 10
- 1.1.2. Opérations et Propriétés dans ℕ 10
- 1.1.3. Multiples et Diviseurs 12

1.2. L'Ensemble des Nombres Entiers Relatifs (ℤ) 14

- 1.2.1. Introduction et Nécessité 14
- 1.2.2. Structure et Représentation.....14
- 1.2.3. Opérations dans ℤ 14

1.3. L'Ensemble des Nombres Décimaux Relatifs (𝔻) 17

- 1.3.1. Définition 17
- 1.3.2. Écriture et Comparaison 17
- 1.3.3. Opérations dans 𝔻.....17

1.4. L'Ensemble des Nombres Rationnels (ℚ) 20

- 1.4.1. Limites de l'ensemble 𝔻 et Introduction de ℚ 20
- 1.4.2. Écritures d'un Nombre Rationnel.....20
- 1.4.3. Nombres Rationnels et Écriture Décimale 22

- 1.4.4. Opérations dans ℚ.....22

1.5. Relations d'Inclusion entre les Ensembles.....23

- 1.5.1. Une Hiérarchie d'Ensembles 23
- 1.5.2. Synthèse des Relations d'Inclusion.....23
- 1.5.3. Visualisation par Diagrammes de Venn.....24

Scenarios et Exercices 26

- Exercices d'Application 26
- Scénarios d'Assimilation.....27

RESSOURCES COMPLEMENTAIRES 📚 32

I. Questions et réponses d'approfondissement 32

II. Confusions et erreurs fréquentes à éviter 🧐 39

- 3.1. Confusion sur l'appartenance aux ensembles.....39
- 3.2. Erreurs de calcul avec les signes dans ℤ.....41
- 3.3. Erreurs classiques dans les opérations sur les fractions (ℚ).....42

III. La fiche de révision prête à l'emploi 📝 43

- 3.1. Les Ensembles de Nombres : L'essentiel 44
- 3.2. La Hiérarchie des Ensembles : Les Inclusions 46
- 3.3. Mémo-Technique des Opérations sur les Fractions.....47

Chapitre 2 : Monômes et Polynômes 📝 50

2.1. Le Calcul Littéral.....50

- 2.1.1. Définition de l'Expression Littérale 50
- 2.1.2. Variables et Constantes.....50
- 2.1.3. Évaluation d'une Expression Littérale 50

2.2. Les Monômes 53

- 2.2.1. Définition d'un Monôme 53
- 2.2.2. Éléments Caractéristiques d'un Monôme 53
- 2.2.3. Les Monômes Semblables 54

2.3. Opérations sur les Monômes 56

- 2.3.1. Addition et Soustraction de Monômes 56

- 2.3.2. Multiplication de Monômes 58
- 2.3.3. Division de Monômes 58
- 2.3.4. Élévation à une Puissance d'un Monôme 59

2.4. Les Polynômes 60

- 2.4.1. Définition d'un Polynôme 60
- 2.4.2. Réduction d'un Polynôme 60
- 2.4.3. Degré d'un Polynôme 61
- 2.4.4. Ordonner un Polynôme 61

2.5. Opérations sur les Polynômes 62

- 2.5.1. Addition et Soustraction de Polynômes 62
- 2.5.2. Multiplication d'un Monôme par un Polynôme 63
- 2.5.3. Multiplication de deux Polynômes 63

Scenarios et Exercices 64

- Exercices d'Application 64
- Scénarios d'Assimilation 65

RESSOURCES COMPLEMENTAIRES 📚 70

I. Questions et réponses d'approfondissement 70

II. Confusions et erreurs fréquentes à éviter 🧐 75

- 3.1. Mauvaise application de la distributivité 76
- 3.2. Erreurs dans la combinaison des termes 77
- 3.3. Erreurs dans la manipulation des exposants 78

III. La fiche de révision prête à l'emploi 📝 79

- 3.1. Les Définitions Fondamentales 79
- 3.2. La Règle d'Or de la Simplification 80
- 3.3. Tableau Récapitulatif des Opérations sur les Monômes 80
- 3.4. Méthodologie des Opérations sur les Polynômes 81

Chapitre 3 : Produits Remarquables et Factorisation ⚙️ 83

3.1. Développement d'Expressions 83

- 3.1.1. Définition du Développement 83

- 3.1.2. La Distributivité Simple 83
- 3.1.3. La Double Distributivité 83

3.2. Les Produits Remarquables 86

- 3.2.1. Carré d'une Somme : $(a + b)^2$ 86
- 3.2.2. Carré d'une Différence : $(a - b)^2$ 87
- 3.2.3. Produit d'une Somme par une Différence : $(a + b)(a - b)$ 87

3.3. La Factorisation 90

- 3.3.1. Définition de la Factorisation 90
- 3.3.2. Technique 1 : La Mise en Évidence (Facteur Commun) 90
- 3.3.3. Technique 2 : Utilisation des Produits Remarquables.....91

3.4. Applications : Simplification de Fractions Rationnelles 94

- 3.4.1. Définition et Principe.....94
- 3.4.2. Méthodologie de Simplification 94
- 3.4.3. Exemple Détaillé.....94

Scenarios et Exercices 97

- Exercices d'Application 97
- Scénarios d'Assimilation.....98

RESSOURCES COMPLEMENTAIRES 📚 103

I. Questions et réponses d'approfondissement 103

II. Confusions et erreurs fréquentes à éviter 🧐 109

- 3.1. Erreurs de manipulation des termes.....109
- 3.2. L'erreur capitale des inéquations 111
- 3.3. Erreurs de mise en équation 111

III. La fiche de révision prête à l'emploi 📝 113

- 3.1. L'Anatomie d'une Équation.....113
- 3.2. Les Principes d'Équivalence : Vos Outils 113
- 3.3. Algorithme de Résolution d'une Équation du Premier Degré ..113
- 3.4. Le Monde des Inéquations 114
- 3.5. La Règle d'Or qui Change Tout.....114

- 3.6. Représenter les Solutions d'une Inéquation sur une Droite....115

Chapitre 4 : Les Équations du Premier Degré à une Inconnue ⚖️ 118

4.1. Notions d'Égalité et d'Équation 118

- 4.1.1. Définition d'une Équation 118
- 4.1.2. Solution d'une Équation 118
- 4.1.3. La Métaphore de la Balance en Équilibre 119

4.2. Les Principes d'Équivalence des Équations.....121

- 4.2.1. Principe d'Addition (Principe 1) 121
- 4.2.2. Principe de Multiplication (Principe 2).....121

4.3. Résolution de l'Équation du Type ax + b = c 124

- 4.3.1. Méthodologie de Résolution en Étapes 124
- 4.3.2. L'Étape Essentielle : La Vérification 126
- 4.3.3. Cas d'Équations plus Générales (ax + b = cx + d) 126

4.4. Résolution de Problèmes.....128

- 4.4.1. Méthodologie de Mise en Équation.....128

Scenarios et Exercices 130

- Exercices d'Application 130
- Scénarios d'Assimilation.....131

Chapitre 5 : Les Inéquations du Premier Degré à une Inconnue 📈 137

5.1. Notions d'Ordre et d'Inéquation.....137

- 5.1.1. Les Symboles d'Inégalité et la Relation d'Ordre 137
- 5.1.2. Définition d'une Inéquation 137
- 5.1.3. L'Ensemble de Solutions.....138

5.2. Principes d'Équivalence des Inéquations.....140

- 5.2.1. Principe d'Addition 140
- 5.2.2. Principe de Multiplication par un Nombre Positif.....140
- 5.2.3. La Règle d'Inversion : Multiplication par un Nombre Négatif 141

5.3. Résolution d'Inéquations.....143

- 5.3.1. Méthodologie Systématique de Résolution.....143

5.4. Représentation Graphique des Solutions 144

- 5.4.1. Les Éléments de la Représentation 144
- 5.4.2. Conventions de Représentation de la Borne.....144
- 5.4.3. Exemples de Représentations Graphiques 145

Scenarios et Exercices 145

- Exercices d'Application 145
- Scénarios d'Assimilation.....147

RESSOURCES COMPLEMENTAIRES 📚 152

I. Questions et réponses d'approfondissement 152

II. Confusions et erreurs fréquentes à éviter 🧐 158

- 3.1. Erreurs de manipulation des termes.....158
- 3.2. L'erreur capitale des inéquations 159
- 3.3. Erreurs de mise en équation 160
- 3.4. Erreurs de représentation graphique.....161

III. La fiche de révision prête à l'emploi 📝 162

- 3.1. L'Anatomie d'une Équation.....162
- 3.2. Les Principes d'Équivalence : Vos Outils.....162
- 3.3. Algorithme de Résolution d'une Équation du Premier Degré ..162
- 3.4. Le Monde des Inéquations 163
- 3.5. La Règle d'Or qui Change Tout.....163
- 3.6. Représenter les Solutions d'une Inéquation sur une Droite....163
- 3.7. Traduire un Problème : Dictionnaire Français-Maths 164

.....166

Chapitre 6 : La Proportionnalité 📊 167

6.1. Grandeurs Proportionnelles 167

- 6.1.1. Définition d'une Grandeur 167
- 6.1.2. Grandeurs Directement Proportionnelles 167
- 6.1.3. Grandeurs Inversement Proportionnelles.....170

6.2. Le Coefficient de Proportionnalité 171
- 6.2.1. Définition et Calcul.....171
- 6.2.2. Utilisation pour Compléter un Tableau 171
- 6.2.3. Le Produit en Croix (La Quatrième Proportionnelle).....172

6.3. Applications de la Proportionnalité 174
- 6.3.1. Les Pourcentages 174
- 6.3.2. Les Échelles 175
- 6.3.3. Les Vitesses Moyennes.....175

Scenarios et Exercices 178
- Exercices d'Application 178
- Scénarios d'Assimilation.....179

Chapitre 7 : Introduction à la Notion de Fonction 184

7.1. Notion de Fonction Linéaire.....184
- 7.1.1. De la Proportionnalité à la Fonction 184
- 7.1.2. Définition Formelle de la Fonction Linéaire 184
- 7.1.3. Le Vocabulaire Fondamental des Fonctions 186
- 7.1.4. Calculer l'Image d'un Nombre.....186
- 7.1.5. Calculer l'Antécédent d'un Nombre 188

7.2. Représentation Graphique d'une Fonction Linéaire.....190
- 7.2.1. Le Repère Cartésien.....190
- 7.2.2. Méthode de Construction du Graphique 190
- 7.2.3. Propriétés Fondamentales de la Représentation Graphique.192
- 7.2.4. Exemple Complet de Tracé.....194
- 7.2.5. Lecture Graphique d'Images et d'Antécédents 194

Scenarios et Exercices 196
- Exercices d'Application 196
- Scénarios d'Assimilation.....197

RESSOURCES COMPLEMENTAIRES 202

I. Questions et réponses d'approfondissement 202

II. Confusions et erreurs fréquentes à éviter 🧐 206
- 3.1. Confusion entre Proportionnalité Directe et Inverse 207
- 3.2. Erreurs de calcul avec les Pourcentages 207
- 3.3. Confusions dans le vocabulaire des fonctions 208
- 3.4. Erreurs de représentation graphique 209

III. La fiche de révision prête à l'emploi 📝 209
- 3.1. Identifier une Situation de Proportionnalité 209
- 3.2. Les Outils de Calcul Clés 210
- 3.3. Le Pont vers les Fonctions Linéaires 210
- 3.4. La Fonction Linéaire $fx = ax$ en un clin d'œil 211

ANNEXES ..... a

ANNEXES ..... a

Annexes i

Glossaire 📖 i
- 1. Concepts Généraux et Ensembles de Nombres i
- 2. Expressions Algébriques et Opérations ii
- 3. Équations, Inéquations et Proportionnalité iii
- 4. Nombres et Structures iv

Tableaux de Référence 🔢 vi
- 1. Carrés et Cubes des Nombres Entiers de 1 à 20 vi
- 2. Propriétés des Opérations sur les Ensembles de Nombres vi
- 3. Formulaire des Produits Remarquables viii



Préliminaires

1. Avant-propos

Ce manuel est conçu comme un outil fondamental pour la mise en œuvre du Programme National de l'Éducation de Base en Algèbre pour la 8ème année. 📘 Il traduit les finalités du curriculum en un parcours d'apprentissage structuré, visant à doter chaque élève d'un socle de compétences mathématiques solides et applicables. L'objectif transcende la simple réussite scolaire ; il s'agit de former des citoyens lucides, critiques et autonomes, capables d'utiliser la puissance du raisonnement algébrique pour analyser des situations concrètes, modéliser des problèmes et élaborer des solutions logiques et efficaces. Ces compétences sont indispensables au développement personnel de l'élève et au progrès collectif de la République Démocratique du Congo.

L'algèbre est plus qu'une branche des mathématiques ; c'est un langage universel. Apprendre l'algèbre, c'est apprendre à penser de manière structurée, à identifier des relations cachées derrière des phénomènes complexes et à généraliser des solutions au-delà des cas particuliers. C'est passer du monde de l'arithmétique, où l'on manipule des nombres connus, au monde de l'algèbre, où l'on raisonne sur des quantités inconnues ou variables. Cette transition conceptuelle est essentielle. Elle permet de modéliser des dynamiques économiques, comme la fluctuation des prix des matières premières dont notre pays est riche ; de planifier des projets logistiques, comme l'acheminement de l'aide humanitaire dans des zones reculées ; ou encore de comprendre des principes scientifiques, de la physique à la biologie.

Ce manuel incarne une philosophie pédagogique qui ancre l'abstraction mathématique dans le vécu congolais. Nous sommes convaincus que les mathématiques cessent d'être intimidantes lorsqu'elles parlent le langage du quotidien de l'élève. C'est pourquoi chaque concept est introduit et illustré par des exemples puisés dans la diversité culturelle, économique et géographique de nos provinces. Une équation du premier degré prendra vie en servant à calculer la répartition d'une récolte de manioc dans le Kwilu ; la proportionnalité deviendra tangible en permettant de déterminer le coût d'une course en taxi-moto à Kisangani ; et les pourcentages auront une signification concrète en modélisant la teneur en cobalt d'un minerai extrait dans le Lualaba. Cette contextualisation n'est pas un simple habillage, mais un outil

pédagogique central destiné à rendre l'apprentissage significatif et à motiver l'élève en lui montrant la pertinence immédiate de son effort.

En parfaite conformité avec le Programme National, cet ouvrage assure une transition cohérente depuis les acquis du cycle primaire. Il consolide les savoirs arithmétiques tout en construisant méthodiquement le nouvel édifice de la pensée algébrique. La progression est spiralaire, chaque nouveau chapitre s'appuyant sur les précédents et les approfondissant. L'ambition de ce manuel est de faire de chaque élève de 8ème année non pas un simple calculateur, mais un jeune esprit capable de poser un problème en termes algébriques, de le résoudre avec rigueur et d'interpréter la solution avec intelligence. C'est en forgeant de telles compétences que l'éducation mathématique contribuera pleinement à l'émergence d'une génération apte à relever les défis de demain.

2. Comment utiliser ce manuel 📝

Ce guide a été spécifiquement structuré pour accompagner l'approche par compétences, une méthode pédagogique active qui place l'élève au centre de son propre apprentissage. Il ne s'agit pas d'un simple recueil de formules, mais d'un parcours organisé pour construire le savoir de manière progressive et durable. Pour en tirer le meilleur parti, il est essentiel que l'enseignant et l'élève comprennent sa logique interne.

Chaque chapitre est une mission, une enquête à mener. La structure de chaque chapitre est conçue comme un cycle d'apprentissage complet :

1. La Famille de Situations : Le Point de Départ Chaque chapitre s'ouvre sur une "famille de situations", qui est un problème complexe et contextualisé, ancré dans une réalité congolaise tangible. Ce problème initial sert de fil rouge. Par exemple, le chapitre sur les équations pourrait commencer par le défi suivant : "Un entrepreneur de Mbuji-Mayi veut lancer une petite unité de production de jus de fruits. Ses coûts fixes (location, machines) sont de 500 000 FC par mois. Chaque bouteille lui coûte 300 FC à produire et il la vend 800 FC. Combien de bouteilles doit-il vendre au minimum chaque mois pour commencer à réaliser un bénéfice ?". Au début du chapitre, l'élève ne possède pas encore tous les outils pour résoudre ce problème de manière formelle. Cette situation crée un besoin, une motivation intrinsèque : elle donne un but concret à l'apprentissage des leçons qui vont suivre.

2. Les Leçons : L'Acquisition des Outils Les leçons qui suivent la situation-problème constituent la "boîte à outils" du chapitre. Elles sont conçues pour être courtes, ciblées et progressives. Chaque leçon introduit un savoir (une

définition, une propriété) ou un savoir-faire (un algorithme de calcul, une méthode de résolution) indispensable. La démarche est systématiquement inductive :

- **Phase concrète :** On part d'un exemple simple, numérique ou tiré d'une situation familière.
- **Phase de formalisation :** On généralise l'observation en introduisant le langage algébrique, les symboles et les règles formelles.
- **Phase d'application :** Un ou deux exemples résolus permettent de voir la règle en action. Ces leçons sont les briques qui, une fois assemblées, permettront de construire la solution au problème initial.

3. Les Exercices : La Consolidation des Acquis Cette section est cruciale pour l'automatisation des compétences. La progressivité des exercices est soigneusement calibrée pour accompagner l'élève à chaque étape de sa maîtrise :

- **Exercices d'application directe :** Il s'agit d'exercices courts et répétitifs visant à maîtriser une technique de base (par exemple, réduire des termes semblables, appliquer une identité remarquable). L'objectif est de s'entraîner jusqu'à ce que la procédure devienne un réflexe.
- **Exercices d'intégration :** Ces problèmes requièrent la combinaison de plusieurs savoir-faire, souvent issus de différentes leçons du même chapitre. Ils testent la capacité de l'élève à choisir les bons outils et à les articuler dans un ordre logique.
- **Problèmes de résolution (contextualisés) :** Similaires à la situation de départ mais de complexité variable, ces problèmes exigent une démarche complète : analyse de l'énoncé, modélisation, résolution et interprétation.

4. Le Retour à la Situation-Problème : Le Bouclage de la Compétence À la fin du chapitre, après avoir acquis et consolidé tous les outils nécessaires, l'élève (guidé par l'enseignant) revient à la "famille de situations" initiale. Le problème, qui paraissait complexe au départ, devient alors abordable. Le résoudre procure un sentiment d'accomplissement et démontre de manière tangible l'utilité et la puissance des concepts appris. Ce retour finalise l'acquisition de la compétence visée par le chapitre.

Conseils pour l'élève : Soyez actif dans votre apprentissage. Ne lisez pas ce manuel comme un roman. À chaque exemple, cachez la solution et essayez de

la trouver par vous-même. Lorsque vous abordez les exercices, ne baissez pas les bras à la première difficulté ; l'erreur fait partie de l'apprentissage. Discutez des problèmes avec vos camarades, car expliquer son raisonnement est l'une des meilleures façons de le consolider.

Conseils pour l'enseignant : Utilisez la structure de ce manuel pour dynamiser votre enseignement. La situation-problème initiale est un excellent support pour un travail de groupe exploratoire. Les leçons peuvent être présentées de manière interactive, en faisant découvrir les règles par les élèves eux-mêmes à partir d'exemples bien choisis. La diversité des exercices vous permet de pratiquer la différenciation pédagogique, en proposant des parcours adaptés au niveau de chaque élève. Votre rôle est celui d'un guide qui accompagne, questionne et aide l'élève à construire son propre savoir.

3. Socle de compétences visées 🎯

Ce manuel est conçu pour développer un ensemble de compétences fondamentales en algèbre, conformément aux directives du Programme National. Au terme de cette année d'apprentissage, au travers des chapitres et des activités proposées, l'élève devra démontrer sa maîtrise des compétences suivantes, qui constituent le socle de sa formation mathématique pour les années à venir. Chaque compétence principale se décline en plusieurs savoir-faire spécifiques et observables.

🟥 Compétence 1 : Modéliser et Résoudre avec les Ensembles de Nombres

L'élève doit être capable d'utiliser la structure des ensembles de nombres ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$) pour représenter, comparer et manipuler des quantités dans des situations variées.

- **Savoir-faire 1.1 (Classifier) :** Identifier avec précision l'ensemble d'appartenance le plus restreint pour un nombre donné et comprendre les relations d'inclusion $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$. L'élève doit pouvoir justifier pourquoi -5 est un entier mais pas un naturel, ou pourquoi 1/3 est un rationnel mais pas un décimal.
- **Savoir-faire 1.2 (Opérer) :** Maîtriser avec aisance les quatre opérations fondamentales dans chaque ensemble, en portant une attention particulière aux règles de signes dans $\mathbb{Z}$ et aux procédures de calcul sur les fractions dans $\mathbb{Q}$ (réduction au même dénominateur, multiplication, division par l'inverse).

- **Savoir-faire 1.3 (Modéliser) :** Choisir l'ensemble de nombres le plus pertinent pour modéliser une situation concrète. Par exemple, utiliser les entiers relatifs ($\mathbb{Z}$) pour décrire le bilan financier d'une petite boutique à Boma (gains et pertes), ou les nombres rationnels ($\mathbb{Q}$) pour représenter le partage équitable d'une récolte au sein d'une coopérative agricole à Kikwit.

Compétence 2 : Manipuler et Transformer des Expressions Algébriques

L'élève doit maîtriser le calcul littéral comme un langage pour généraliser des relations arithmétiques et manipuler des expressions contenant des variables.

- **Savoir-faire 2.1 (Calculer) :** Effectuer avec rigueur les additions, soustractions, multiplications et divisions de monômes et de polynômes. Cela inclut la réduction des termes semblables, l'application correcte des règles des exposants et la maîtrise de la distributivité.
- **Savoir-faire 2.2 (Développer) :** Transformer systématiquement un produit en une somme en utilisant la distributivité simple ou double. L'élève doit notamment reconnaître et appliquer avec rapidité les trois identités remarquables fondamentales : $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ et $(a+b)(a-b)$.
- **Savoir-faire 2.3 (Factoriser) :** Effectuer l'opération inverse du développement en transformant une somme en un produit. L'élève doit maîtriser les deux techniques de base : la mise en évidence d'un facteur commun et la factorisation à l'aide des identités remarquables.
- **Savoir-faire 2.4 (Simplifier) :** Appliquer la factorisation pour simplifier des fractions rationnelles, en identifiant et en annulant les facteurs communs au numérateur et au dénominateur.

Compétence 3 : Résoudre des Problèmes à l'aide d'Équations et d'Inéquations

L'élève doit être capable de traduire un problème du premier degré en langage mathématique, de le résoudre et d'interpréter la solution.

- **Savoir-faire 3.1 (Mettre en équation/inéquation) :** Analyser un problème énoncé en français, identifier la quantité inconnue, la représenter par une variable (x) et traduire les relations et contraintes de l'énoncé en une équation ou une inéquation du premier degré.

- **Savoir-faire 3.2 (Résoudre) :** Appliquer de manière systématique les principes d'équivalence pour isoler l'inconnue et trouver la solution d'une équation ou l'ensemble de solutions d'une inéquation. L'élève doit maîtriser parfaitement la règle d'inversion du sens de l'inégalité lors de la multiplication ou division par un nombre négatif.
- **Savoir-faire 3.3 (Interpréter) :** Vérifier que la solution mathématique trouvée est cohérente avec le contexte du problème (par exemple, un âge ne peut être négatif). L'élève doit être capable de formuler une réponse claire et précise à la question initialement posée, dans le langage courant.
- **Savoir-faire 3.4 (Représenter) :** Visualiser l'ensemble des solutions d'une inéquation en le représentant correctement sur une droite numérique, en utilisant les conventions appropriées pour les bornes (incluses ou exclues).

Compétence 4 : Analyser des Relations Fonctionnelles Simples

L'élève doit pouvoir utiliser les concepts de proportionnalité et de fonction linéaire pour modéliser et interpréter la relation entre deux grandeurs variables.

- **Savoir-faire 4.1 (Analyser la proportionnalité) :** Reconnaître une situation de proportionnalité directe ou inverse à partir d'un tableau de données. L'élève doit savoir calculer et interpréter le coefficient de proportionnalité.
- **Savoir-faire 4.2 (Utiliser la proportionnalité) :** Résoudre des problèmes concrets relevant de la proportionnalité, notamment ceux impliquant des pourcentages (calcul de remise, d'augmentation), des échelles (lecture de carte, par exemple pour estimer la distance réelle entre Kananga et Mbuji-Mayi) et des vitesses moyennes.
- **Savoir-faire 4.3 (Modéliser avec une fonction) :** Traduire une situation de proportionnalité directe en une fonction linéaire de la forme $f(x) = ax$. L'élève doit maîtriser le vocabulaire associé : variable, image, antécédent. Par exemple, il doit pouvoir modéliser le coût d'une course en taxi-moto à Kisangani, où le prix est proportionnel à la distance, par une fonction linéaire.
- **Savoir-faire 4.4 (Interpréter un graphique) :** Représenter graphiquement une fonction linéaire dans un repère cartésien en

comprenant que le résultat est une droite passant par l'origine. L'élève doit pouvoir interpréter la signification du coefficient directeur (la pente) et utiliser le graphique pour lire une image ou un antécédent.

Éditions Donel C.
Direction Éditoriale et Conception Générale :
MURHULA BAZIKANGE M.
Pour contacts, mon site web :
https://murhulabazikange.com/

© 2025, Donel Consulting, Kin. RDC
Tous droits réservés.

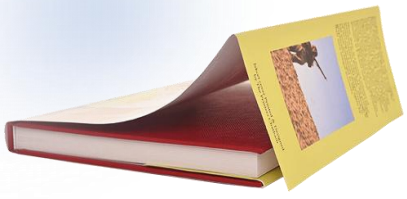
Pour l'excellence de l'éducation en RDC,
Tous les manuels scolaires en un seul endroit,
sur ce site web :
https://manuels-scolaires-rdc.com/

Pour plus de détails, scannez ceci :

PARTIE I

Les Nombres et leurs Ensembles

Cet ensemble de chapitres établit les fondations numériques de l'algèbre. Il vise à consolider et à étendre la compréhension des élèves sur les différents types de nombres, leurs propriétés et les opérations qui les régissent, en assurant une transition fluide de l'arithmétique vers le calcul symbolique.



Chapitre 1 : Les Ensembles de Nombres 🧮

Ce chapitre a pour but de structurer la connaissance des nombres en les classifiant dans des ensembles distincts, chacun avec ses propriétés spécifiques. La maîtrise de cette classification est essentielle pour comprendre le champ d'application des différentes opérations et la nature des solutions aux équations.

1.1. L'Ensemble des Nombres Naturels ($\mathbb{N}$)

1.1.1. Définition et Représentation

L'ensemble des nombres naturels, noté $\mathbb{N}$, est le premier ensemble de nombres que l'on rencontre. Il sert fondamentalement à dénombrer, à compter des objets entiers.

- Cet ensemble commence par 0 et s'étend à l'infini, sans jamais comporter de partie décimale ou négative.
- On le représente de la manière suivante : $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5,\dots\}$.
- Chaque nombre dans cet ensemble est appelé un entier naturel.

Par exemple, pour compter le nombre de vaches dans un troupeau à Masisi, dans le Nord-Kivu, ou le nombre de sacs de maïs récoltés dans un champ du Kasaï-Oriental, nous utilisons exclusivement les nombres naturels.

1.1.2. Opérations et Propriétés dans $\mathbb{N}$

Les deux opérations fondamentales dans l'ensemble des nombres naturels sont l'addition et la multiplication.

1.1.2.1. L'Addition (+)

L'addition de deux nombres naturels donne toujours un autre nombre naturel. Cette propriété est appelée la stabilité ou la fermeture de l'addition dans $\mathbb{N}$.

- Soient a et b deux nombres appartenant à $\mathbb{N}$ (noté $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$), leur somme $c = a + b$ appartient aussi à $\mathbb{N}$ ($c \in \mathbb{N}$).
- **Commutativité** : L'ordre des termes ne change pas le résultat. $a + b = b + a$.
- Par exemple, $7 + 5 = 12$ et $5 + 7 = 12$.

- **Associativité** : Le regroupement des termes ne change pas le résultat. $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- Par exemple, $(2 + 3) + 4 = 5 + 4 = 9$ et $2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9$.
- **Élément neutre** : Le nombre 0 est l'élément neutre de l'addition, car ajouter 0 à un nombre ne le change pas. $a + 0 = 0 + a = a$.

1.1.2.2. La Multiplication (× ou ·)

La multiplication de deux nombres naturels donne toujours un autre nombre naturel. La multiplication est donc stable dans $\mathbb{N}$.

- Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$, leur produit $d = a \times b$ appartient aussi à $\mathbb{N}$ ($d \in \mathbb{N}$).
- **Commutativité** : L'ordre des facteurs ne change pas le produit. $a \times b = b \times a$.
- Par exemple, $4 \times 6 = 24$ et $6 \times 4 = 24$.
- **Associativité** : Le regroupement des facteurs ne change pas le produit. $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.
- Par exemple, $(2 \times 3) \times 5 = 6 \times 5 = 30$ et $2 \times (3 \times 5) = 2 \times 15 = 30$.
- **Élément neutre** : Le nombre 1 est l'élément neutre de la multiplication. $a \times 1 = 1 \times a = a$.
- **Élément absorbant** : Le nombre 0 est l'élément absorbant de la multiplication, car multiplier un nombre par 0 donne toujours 0. $a \times 0 = 0 \times a = 0$.

1.1.2.3. La Distributivité

La multiplication est distributive par rapport à l'addition. Cette propriété lie les deux opérations.

- $k \times (a + b) = (k \times a) + (k \times b)$.
- Par exemple, $5 \times (3 + 2) = 5 \times 5 = 25$.
- En appliquant la distributivité : $(5 \times 3) + (5 \times 2) = 15 + 10 = 25$. Le résultat est identique.

1.1.3. Multiples et Diviseurs

1.1.3.1. Définitions

- Un nombre a est un **multiple** d'un nombre b s'il existe un entier naturel k tel que $a = b \times k$.
- Par exemple, 28 est un multiple de 7 car $28 = 7 \times 4$.
- Un nombre d est un **diviseur** d'un nombre a si la division de a par d donne un reste nul.
- Par exemple, 6 est un diviseur de 24 car $24 \div 6 = 4$ (reste 0).
- L'ensemble des diviseurs de 12 est $D_{12} = \{1,2,3,4,6,12\}$.

1.1.3.2. PGDC et PPMC

- Le **Plus Grand Commun Diviseur (PGDC)** de deux nombres est le plus grand nombre qui les divise tous les deux.
- Le **Plus Petit Commun Multiple (PPMC)** de deux nombres est le plus petit nombre non nul qui est un multiple de ces deux nombres.

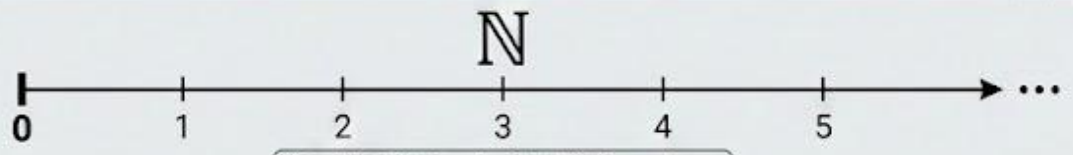
1.1.3.3. Critères de Divisibilité

- Un nombre est divisible par 2 si son dernier chiffre est 0, 2, 4, 6 ou 8 (il est pair).
- Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.
- Un nombre est divisible par 5 si son dernier chiffre est 0 ou 5.

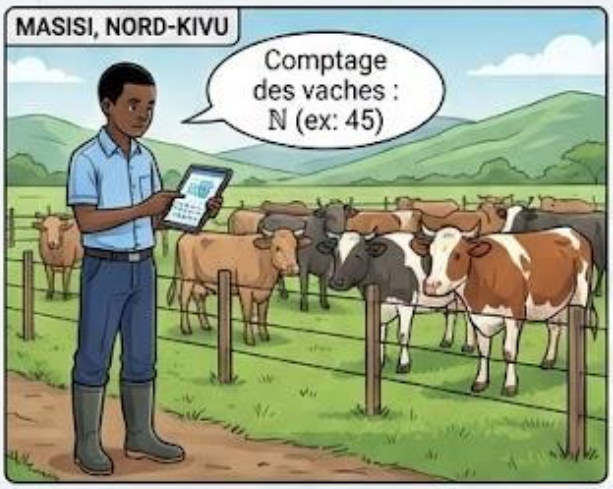
CHAPITRE 1 : LES ENSEMBLES DE NOMBRES

Structuration des connaissances : classification, opérations et propriétés.

1.1. L'ENSEMBLE DES NOMBRES NATURELS (ℕ)



ℕ = {0, 1, 2, 3, ...} : Sert à dénombrer.





1.1.2. OPÉRATIONS ET PROPRIÉTÉS DANS ℕ

1.1.2.1. L'Addition (+)

Commutativité



$a + b = b + a$

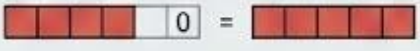
Associativité



$3 + (2 + 4) = 9$

$(a + b) + c = a + (b + c)$

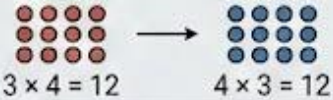
Élément neutre



$a + 0 = a$

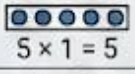
1.1.2.2. La Multiplication (×)

Commutativité



$a \times b = b \times a$

Élément neutre



$a \times 1 = a$

Élément absorbant



$a \times 0 = 0$

1.1.2.3. La Distributivité



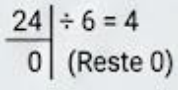
$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

1.1.3. MULTIPLES ET DIVISEURS

Définitions



Multiple : 28 est multiple de 7 car 28 = 4 × 7



Diviseur : 6 est diviseur de 24

Critères de Divisibilité		
2	Divisible par 2 si pair (fini par 0, 2, 4, 6, 8).	Ex: 128
3	Divisible par 3 si somme des chiffres est multiple de 3.	Ex: 123 (1+2+3=6)
5	Divisible par 5 si fini par 0 ou 5.	Ex: 145

1.2. L'Ensemble des Nombres Entiers Relatifs ($\mathbb{Z}$)

1.2.1. Introduction et Nécessité

L'ensemble des nombres naturels ($\mathbb{N}$) est insuffisant pour représenter certaines situations, comme une dette, une température en dessous de zéro ou une altitude sous le niveau de la mer. La soustraction de deux nombres naturels ne donne pas toujours un nombre naturel (par exemple, $5 - 8 = ?$).

Pour résoudre ce problème, nous introduisons l'ensemble des nombres entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$.

- Cet ensemble contient tous les nombres naturels, leurs opposés (les nombres négatifs) et zéro.
- On le représente ainsi : $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- Un nombre comme -5 peut représenter une température de 5 degrés Celsius en dessous de zéro à certains endroits du Parc National des Virunga en saison sèche, ou une dette de 5 000 Francs Congolais.

1.2.2. Structure et Représentation

L'ensemble $\mathbb{Z}$ est composé de trois parties :

- Les entiers positifs : $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ (qui sont les naturels non nuls).
- Zéro : $\{0\}$.
- Les entiers négatifs : $\mathbb{Z}^- = \{\ldots, -3, -2, -1\}$.
- On peut écrire que $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$.
- On peut représenter ces nombres sur une droite numérique, avec 0 au centre, les nombres positifs à droite et les nombres négatifs à gauche.

1.2.3. Opérations dans $\mathbb{Z}$

Les opérations d'addition et de multiplication sont également stables dans $\mathbb{Z}$. La soustraction devient une opération stable aussi.

1.2.3.1. Addition et Soustraction

La règle des signes est fondamentale ici.

- Pour additionner deux nombres de même signe, on additionne leurs valeurs absolues et on garde le signe commun.

- $(-5)+(-3)=-8$.
- $(+7)+(+2)=+9$.
- Pour additionner deux nombres de signes contraires, on soustrait la plus petite valeur absolue de la plus grande et on donne au résultat le signe du nombre ayant la plus grande valeur absolue.
- $(-9)+(+4)=-5$.
- $(+11)+(-6)=+5$.
- Soustraire un nombre revient à additionner son opposé : $a-b=a+(-b)$.
- Par exemple, $10-15=10+(-15)=-5$.

1.2.3.2. Multiplication

Le produit de deux nombres de même signe est toujours positif.

- $(+a)\times(+b)=+ab$.
- $(-a)\times(-b)=+ab$.
- Par exemple, $(-4)\times(-5)=+20$.

Le produit de deux nombres de signes contraires est toujours négatif.

- $(+a)\times(-b)=-ab$.
- $(-a)\times(+b)=-ab$.
- Par exemple, $(+6)\times(-3)=-18$.

1.2.3.3. Division

La division n'est pas stable dans $\mathbb{Z}$. Le quotient de deux entiers n'est pas toujours un entier.

- Par exemple, $7\div 2$ n'est pas un entier.
- Cependant, lorsque la division est possible (division euclidienne avec un reste nul), les règles de signes sont les mêmes que pour la multiplication.
- $(-30)\div(+5)=-6$.

1.2. L'Ensemble des Nombres Entiers Relatifs ($\mathbb{Z}$)

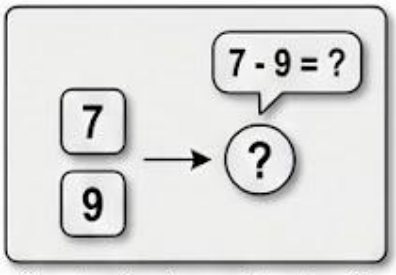
1.2.1. Introduction et Nécessité



Température : -5 °C



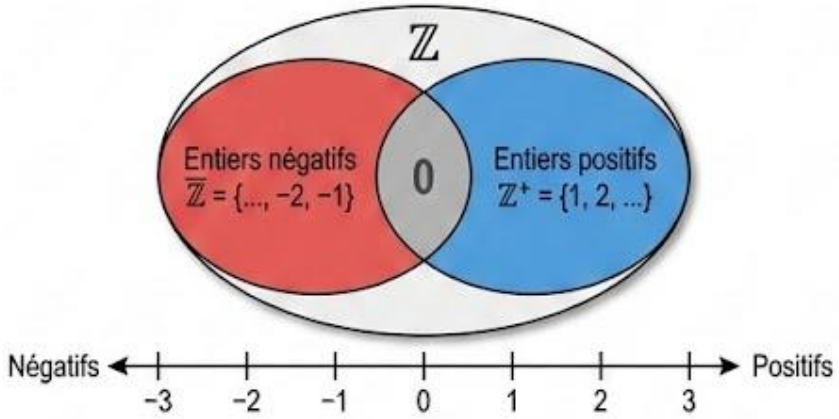
Dette : 5 000 Francs Congolais



Soustraction impossible dans $\mathbb{N}$

Solution : Introduction de $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

1.2.2. Structure et Représentation



1.2.3. Opérations dans $\mathbb{Z}$

1.2.3.1. Addition et Soustraction

Même signe : (+5) + (+4) = +9



(−7) + (−3) = −10



Signes contraires : (+7) + (−3) = +4



(−2) + (+8) = +6



Soustraction :
$a - b = a + (-b)$

$(-2) - (+5) = (-2) + (-5) = -7$

1.2.3.2. Multiplication

Même signe : (+) × (+) = +
(+3) × (+5) = +15
(−) × (−) = +
(−4) × (−6) = +24

Signes contraires : (+) × (−) = −
(+7) × (−2) = −14
(−) × (+) = −
(−9) × (+3) = −27

(−5) × (+6) = −30

1.2.3.3. Division

Division non stable dans $\mathbb{Z}$

$7 \div 3 = 2.33...$
N'est pas un entier

$(-24) \div (+4) = -6$