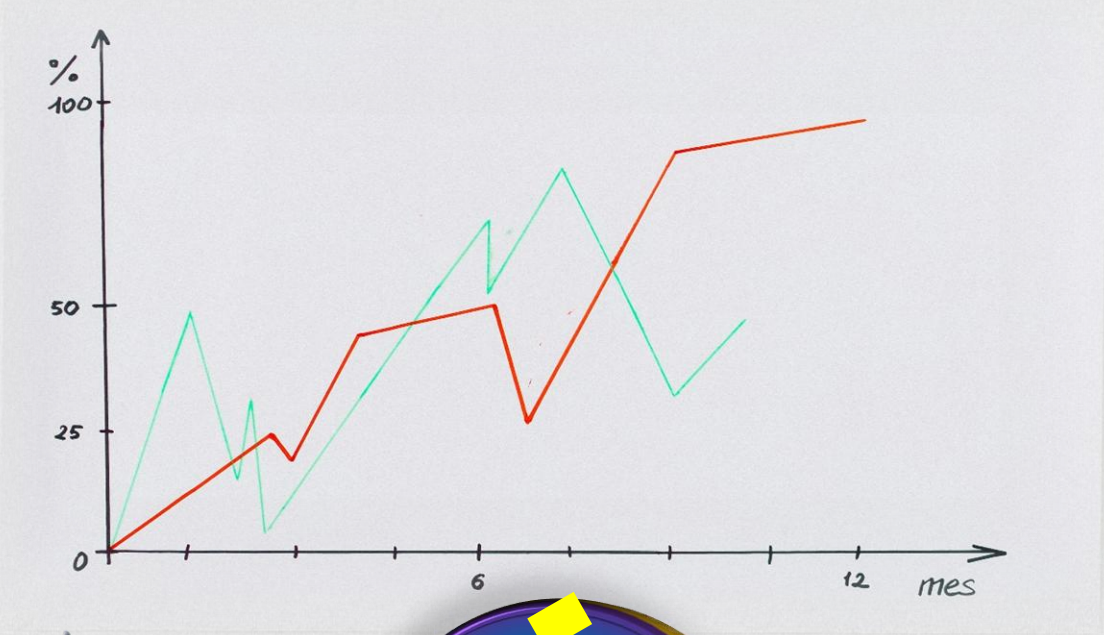
Algèbre & Analyse



CONFORME AU PROGRAMME NATIONAL

2è Année

EDITION 2025

Option humanités

SCIENTIFIQUES



TABLE DES MATIÈRES

PRÉLIMINAIRES **1**

0.1. Note aux Enseignants et Préface 1

- 0.1.1. De la Règle à la Structure 1
- 0.1.2. L'Approche par Connexion 1
- 0.1.3. Finalité : L'Autonomie de l'Esprit Scientifique 1

0.2. Profil de Sortie et Compétences Visées 2

- 0.2.1. Maîtrise des Fondamentaux Algébriques et Analytiques 2
- 0.2.2. Consolidation du Raisonnement Hypothético-Déductif 2
- 0.2.3. Autonomie dans la Résolution de Problèmes 2

0.3. Méthodologie et Approche par Situations 2

- 0.3.1. Primauté de la situation-problème 2
- 0.3.2. Séquençage Didactique : Concret-Abstrait-Concret 3
- 0.3.3. Posture de l'Enseignant : Facilitateur du Raisonnement 3

PARTIE 1. FONDEMENTS ALGÉBRIQUES ET ARITHMÉTIQUE DES POLYNÔMES **4**

Au-delà des nombres, les mêmes règles 4

Les polynômes : des expressions bien ordonnées 4

La division euclidienne : un algorithme central 4

Du PGCD à la factorisation : les objectifs finaux 4

CHAPITRE 1. LOGIQUE FORMELLE ET LANGAGE MATHÉMATIQUE (MM4.1) **5**

1.1. Syntaxe, Propositions et Valeurs de Vérité 5

- a. Les fondations de la certitude 5
- A. Proposition et Valeur de Vérité 5

FIGURE 1 : RÉF. IMG (9504-0967-7161) **7**

Diagramme simple illustrant une proposition et ses deux valeurs de vérité 7

- B. Syntaxe et Connecteurs Logiques 7

FIGURE 2 : RÉF. IMG (0435-7133-3585) **10**

Schéma des trois connecteurs logiques de base avec des cercles colorés 10

- C. Scénarios et Exercices 10

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

1.2. Connecteurs Logiques et Tables de Vérité....12
- a. La logique au cœur du débat....12
- A. Les connecteurs fondamentaux : Négation, Conjonction, Disjonction....12

FIGURE 3 : RÉF. IMG (4736-0407-7110)....15

Table de vérité résumant la négation, la conjonction et la disjonction....15
- B. L'Implication et l'Équivalence....15

FIGURE 4 : RÉF. IMG (4509-9405-7165)....17

Table de vérité illustrant les connecteurs d'implication et d'équivalence log....17
- C. Scénarios et Exercices....17

1.3. Raisonnement Déductif et Vérification d'Énoncés....19
- a. De l'enquête à la démonstration....19
- A. Le Raisonnement Déductif : Du Général au Particulier....19

FIGURE 5 : RÉF. IMG (6031-4638-6882)....22

Schéma du raisonnement déductif comme un entonnoir logique du général au part....22
- B. Les Outils de Vérification d'un Énoncé....22

FIGURE 6 : RÉF. IMG (6116-0891-9886)....25

Le principe du contre-exemple : une seule brebis noire suffit....25
- c. La démonstration par l'absurde....25
- SCÉNARIOS ET EXERCICES....26

CHAPITRE 2. NOMBRES RÉELS, PUISSANCES ET RADICAUX (MM4.2)....28

2.1. Puissances à Exposants Rationnels dans R....28
- a. Le besoin d'unifier racines et puissances....28
- A. Définition et lien avec les radicaux....28

FIGURE 7 : RÉF. IMG (5933-9969-4526)....30

Décomposition visuelle de la puissance à exposant rationnel 8^(2/3)....30
- B. Propriétés des exposants rationnels....30

FIGURE 8 : RÉF. IMG (2440-0714-3645)....33

Application des propriétés des exposants sur une expression algébrique complexe....33
- C. Scénarios et Exercices....33

2.2. Théorie et Opérations sur les Radicaux d'Indice n....35

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

- a. Introduction : une question de racine....35
- A. Définition et vocabulaire de base....35

FIGURE 9 : RÉF. IMG (2117-5078-8930)....37

Anatomie d'un radical : indice, radicande et symbole radical....37

- B. Propriétés fondamentales des opérations....37

FIGURE 10 : RÉF. IMG (8997-5242-1126)....40

Visualisation de la propriété du produit des radicaux de même indice....40

- C. Simplification et forme canonique....40

2.3. Applications aux Calculs de Dimensions et Volumes....43

- a. Du symbole à la brique....43
- A. Dimensions et Surfaces....43
- B. Volumes et Capacités....43

FIGURE 11 : RÉF. IMG (2993-5369-6055)....46

Relation entre la longueur d'une arête, l'aire et le volume....46

- b. L'anecdote du menuisier de la Tshopo....46

CHAPITRE 3. POLYNÔMES ET DIVISION EUCLIDIENNE (MM4.3)....49

3.1. Définition et Caractérisation des Polynômes....49

- a. L'outil algébrique universel....49
- A. Forme générale et vocabulaire....49

FIGURE 12 : RÉF. IMG (7298-7839-6615)....51

Anatomie d'un polynôme simple, le cas de $P(x) = 2x^3 - 5x + 7$....51

- B. Caractéristiques fondamentales....51

FIGURE 13 : RÉF. IMG (4958-4116-7168)....54

Identification des caractéristiques sur un polynôme de degré 4....54

- Scénarios et Exercices....54

3.2. Division Euclidienne et Schéma de Horner....56

- a. L'héritage de la division....56
- A. Le théorème de la division euclidienne....56

FIGURE 14 : RÉF. IMG (0160-7532-6051)....58

Représentation visuelle de la division euclidienne d'un polynôme P(x)....58

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

- B. L'efficacité du schéma de Horner....58

FIGURE 15 : RÉF. IMG (0834-6071-0747)....61

Le mécanisme du schéma de Horner pour diviser par (x-a)....61

- L'anecdote du marchand de tissus de Mbandaka....61

3.3. Zéros d'un Polynôme et Théorème du Reste....63

- a. La quête de l'équilibre....63
- A. Zéro d'un polynôme : Le point d'annulation....63

FIGURE 16 : RÉF. IMG (4435-3832-3681)....65

Visualisation des zéros d'une fonction polynomiale sur un graphe....65

- B. Le Théorème du Reste : Un calcul astucieux....65

FIGURE 17 : RÉF. IMG (3699-8006-0541)....68

Schéma conceptuel du théorème du reste simplifiant la division euclidienne....68

- b. La recette secrète du boulanger de Mbandaka....68

PARTIE 2. CALCUL POLYNOMIAL AVANCÉ ET ANALYSE FONCTIONNELLE....71

Des polynômes bien connus aux outils de précision....71

L'analyse, ou l'art d'étudier le comportement....71

Des fonctions aux espaces fonctionnels : un saut dans l'abstraction....71

Synthèse et applications : modeler le réel....71

CHAPITRE 4. FACTORISATION ET ARITHMÉTIQUE DES POLYNÔMES (MM4.4)....72

4.1. Méthodes Avancées de Factorisation....72

- a. L'art de décomposer l'indécomposable....72
- A. La Méthode de Horner (ou division synthétique)....72

FIGURE 18 : RÉF. IMG (5516-9301-9451)....74

Schéma algorithmique de la division synthétique par la méthode de Horner....74

- B. La Factorisation par Groupement Stratégique....74

FIGURE 19 : RÉF. IMG (8161-8563-3933)....77

Visualisation de la factorisation par groupement de termes polynomiaux....77

- Scénarios et Exercices....77

4.2. PGCD et PPCM des Polynômes....79

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

- a. Le partage équitable des savoirs....79
- A. Détermination du PGCD par l'algorithme d'Euclide....79

FIGURE 20 : RÉF. IMG (1861-9843-8975)....82

Représentation de l'algorithme d'Euclide pour deux polynômes....82

- B. PPCM et la relation fondamentale....82

FIGURE 21 : RÉF. IMG (5542-6829-0212)....85

Diagramme de Venn pour les facteurs des polynômes....85

- Scénarios et Exercices....85
- a. L'énigme du menuisier de Mbandaka....85

4.3. Application à la Simplification des Fractions Rationnelles....87

- a. L'illusion de la complexité....87
- A. Le Principe : Identifier et Éliminer les Facteurs Communs....87
- B. Méthode Systématique et Domaine de Définition....88

FIGURE 22 : RÉF. IMG (1371-1011-8162)....90

Visualisation du processus de simplification d'une fraction rationnelle....90

- Scénarios et Exercices....90

CHAPITRE 5. FRACTIONS RATIONNELLES ET OPÉRATIONS (MM4.5)....93

5.1. Domaine de Définition et Simplification....93

- a. L'énigme du dénominateur....93
- A. Le Domaine de Définition : La Condition d'Existence....93

FIGURE 23 : RÉF. IMG (5392-9027-3129)....95

Représentation du domaine de définition d'une fraction sur un axe numérique....95

- B. La Simplification : Un Art de la Précision....95

FIGURE 24 : RÉF. IMG (2191-8087-3763)....98

Graphique d'une fonction simplifiée montrant le point de discontinuité....98

- Anecdote : Le plan de coupe du menuisier de Mbuji-Mayi....98

5.2. Opérations Algébriques sur les Fractions Rationnelles....100

- a. Le paradoxe du rendement moyen....100
- A. Addition et Soustraction....100

FIGURE 25 : RÉF. IMG (1802-9159-4506)....103

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

Schéma visuel de l'addition de deux fractions rationnelles distinctes.....103
- B. Multiplication et Division.....103

FIGURE 26 : RÉF. IMG (7812-7625-0607).....106

Mécanisme de la division par l'inversion et la multiplication.....106
- C. Scénarios et Exercices.....106

5.3. Zéros et Étude de Signe d'une Fraction Rationnelle.....108
- a. Le néant et le chaos.....108
- A. Détermination des Zéros.....109

FIGURE 27 : RÉF. IMG (4205-0005-6413).....111

Graphique illustrant les zéros et les valeurs interdites d'une fonction.....111
- B. Méthodologie de l'Étude de Signe.....111

FIGURE 28 : RÉF. IMG (2355-8824-7747).....114

Tableau de signes pour une fraction rationnelle simple et sa construction.....114
- Scénarios et Exercices.....114

CHAPITRE 6. ANALYSE DE LA FONCTION DU SECOND DEGRÉ (MM4.6).....117

6.1. Forme Canonique et Analyse de la Parabole.....117
- a. Le secret géométrique caché dans l'algèbre.....117
- A. De la Forme Développée à la Forme Canonique.....117

FIGURE 29 : RÉF. IMG (9690-5868-6720).....119

Parabole à concavité tournée vers le haut (a > 0).....119
- B. Interprétation Géométrique et Variations.....119

FIGURE 30 : RÉF. IMG (0178-9666-4070).....122

Parabole à concavité tournée vers le bas (a < 0).....122
- b. Scénarios et Exercices.....122

6.2. Zéros de la Fonction et Intersection avec les Axes.....124
- a. Les origines graphiques de la fonction.....124
- A. Les Zéros de la Fonction (Racines).....124

FIGURE 31 : RÉF. IMG (0661-5459-3700).....127

Visualisation des trois cas du discriminant delta pour une parabole.....127
- B. Intersection avec l'Axe des Ordonnées.....127

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

FIGURE 32 : RÉF. IMG (0135-4686-0451)....130

Identification du point d'intersection avec l'axe des ordonnées (y-axis)....130

- L'anecdote du pont de Matadi....130

6.3. Variations, Extremums et Représentation Graphique....132

- a. Le secret millénaire de la courbe parfaite....132
- A. Le Coefficient Directeur 'a' : Le Chef d'Orchestre....133
- B. Le Sommet de la Parabole (S) : Le Point Stratégique....133

FIGURE 33 : RÉF. IMG (8430-8023-9462)....135

Visualisation de la parabole et du rôle du coefficient directeur 'a'....135

- C. Tableau de Variation : La Synthèse....135

PARTIE 3. ÉQUATIONS, INÉQUATIONS ET MODÉLISATION....138

Des outils pour décider....138

Le langage de la contrainte....138

La modélisation, un pont vers le réel....138

L'optimisation, ou l'art du meilleur choix....138

CHAPITRE 7. RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ ET PARAMÉTRIQUES (MM4.7,...)....139

7.1. Résolution par la Méthode du Discriminant....139

- a. La clé du second degré....139
- A. Le discriminant, un outil de décision....139

FIGURE 34 : RÉF. IMG (8995-4686-8837)....141

Le discriminant positif et les deux racines distinctes de l'équation....141

- B. Interprétation des solutions selon le signe de....141

FIGURE 35 : RÉF. IMG (6678-9181-3479)....144

Les cas du discriminant nul et du discriminant négatif....144

- b. Le champ de manioc du chef Kanku....144

7.2. Relations Racines-Coefficients et Reconstruction d'Équation....146

- a. L'accroche : l'ingénierie inverse....146
- A. Somme et Produit des Racines (Formules de Viète)....146

FIGURE 36 : RÉF. IMG (1391-9875-2723)....149

Les Liens Secrets entre Racines et Coefficients d'un Polynôme.....149
- B. Reconstruction d'une Équation à partir de ses Racines.....149

FIGURE 37 : RÉF. IMG (0714-2273-7605).....152

Reconstruire une Équation du Second Degré à Partir de ses Solutions.....152
- C. Scénarios et Exercices.....152

7.3. Équations Paramétriques du Second Degré.....154
- a. Le paramètre, une variable cachée.....154
- A. DÉFINITION ET MISE EN FORME.....154
- B. LA DISCUSSION PAR LE DISCRIMINANT.....154

FIGURE 38 : RÉF. IMG (3377-6991-2622).....157

Influence du paramètre m sur la position d'une parabole.....157

FIGURE 39 : RÉF. IMG (7671-1166-8011).....159

Arbre de décision pour la discussion d'une équation paramétrique.....159
- b. Scénarios et exercices.....159

CHAPITRE 8. ÉQUATIONS RÉDUCTIBLES ET SYSTÈMES NON-LINÉAIRES (MM4.9).....163

8.1. Équations Réductibles (Bicarrées, Réciproques).....163
- a. L'art de la simplification.....163
- A. Équations Bicarrées : Le Changement de Variable.....163

FIGURE 40 : RÉF. IMG (3468-9241-9563).....165

Mécanisme de résolution d'une équation bicarrée par changement de variable.....165
- B. Équations Réciproques : La Symétrie des Coefficients.....165

FIGURE 41 : RÉF. IMG (2587-3606-1907).....168

Structure symétrique des coefficients d'une équation réciproque de degré 4.....168
- Scénarios et Exercices.....168

8.2. Équations Irrationnelles et Vérification des Solutions.....170
- a. La racine carrée et ses pièges.....170
- A. Conditions d'Existence et de Validité.....170

FIGURE 42 : RÉF. IMG (8780-2515-5316).....173

Schéma de résolution d'une équation irrationnelle en quatre étapes.....173
- B. Méthode de Résolution et Introduction de Solutions Étrangères.....173

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

FIGURE 43 : RÉF. IMG (0917-0780-3582)....176

Graphes des fonctions y=√(x+2) et y=x-4 montrant une intersection....176

- C. Scénarios et Exercices....176

8.3. Systèmes Simples conduisant au Second Degré....178

- a. Le piège de la simplicité....178
- A. Anatomie d'un Système Simple Non-Linéaire....178
- B. La Méthode de Substitution : Une Procédure Chirurgicale....179

FIGURE 44 : RÉF. IMG (3131-2349-5011)....180

Intersection d'une droite et d'un cercle : trois cas de figure....180

- Scénarios et Exercices....180

CHAPITRE 9. INÉQUATIONS ET RÉSOLUTION DE PROBLÈMES COMPLEXES (MM4.10, MM4.11)....183

9.1. Signe du Trinôme et Inéquations du Second Degré....183

- a. L'avertissement du prospecteur....183
- A. Le discriminant, clé de voûte du système....183

FIGURE 45 : RÉF. IMG (9500-1764-6350)....185

Parabole coupant l'axe des abscisses en deux points distincts ()....185

- B. La règle du signe selon....185

FIGURE 46 : RÉF. IMG (1960-9665-5196)....187

Cas où la parabole touche ou ne touche pas l'axe ()....187

- b. L'anecdote de Papa Bope à Matadi....187

9.2. Résolution d'Inéquations Produits et Quotients....189

- a. La logique des signes....189
- A. L'inéquation produit et le tableau de signes....190

FIGURE 47 : RÉF. IMG (5239-1592-0137)....192

Tableau de signes pour une inéquation produit à deux facteurs distincts....192

- B. Le cas de l'inéquation quotient : la valeur interdite....192

9.3. Modélisation et Problèmes d'Optimisation....195

- a. Le défi de l'optimisation....195
- A. Traduire le réel : Le langage des inéquations....195
- B. La zone des solutions et le point optimal....196

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

FIGURE 48 : RÉF. IMG (5964-7435-1458) **199**

Représentation graphique d'une zone de solutions et de ses sommets 199

- b. Scénarios et Exercices 199

ANNEXES **202**

A.1. Tableaux Récapitulatifs des Formules 202

- A. Dérivées et Primitives 202
- B. Nombres Complexes 203
- C. Limites et Croissances Comparées 204
- D. Trigonométrie 204

A.2. Guide de Résolution des Problèmes Types 205

- A. Problèmes d'Analyse 205
- B. Problèmes d'Algèbre 207

A.3. Recueil d'Exercices Supplémentaires Contextualisés 208

- A. Typologie des Problèmes d'Analyse 208
- B. Typologie des Problèmes d'Algèbre Linéaire 210

A.4. Corrigés Commentés des Exercices Clés 212

- A. Principes Directeurs du Commentaire Pédagogique 212
- B. Points de Vigilance Spécifiques en Analyse 212
- C. Points de Vigilance Spécifiques en Algèbre Linéaire 213

PRÉLIMINAIRES

0.1. Note aux Enseignants et Préface

Ce manuel est articulé autour d'une conviction pédagogique forte. La véritable maîtrise de l'algèbre et de l'analyse réside dans l'intelligence des structures qui les sous-tendent, bien au-delà de l'application mécanique des formules. Chaque chapitre est donc construit pour exposer la logique interne et la genèse des concepts avant de détailler la technique opératoire.

0.1.1. De la Règle à la Structure

La progression didactique choisie vise à déplacer le centre de gravité de l'apprentissage. Il s'agit de passer d'une connaissance procédurale, souvent fragile, à une compréhension structurelle profonde. Les démonstrations ne sont pas de simples exercices de style. Elles sont présentées comme des chemins de raisonnement essentiels qui justifient et éclairent les propriétés étudiées. L'élève apprend ainsi le "pourquoi" avant de solidifier le "comment".

0.1.2. L'Approche par Connexion

Une attention particulière est portée à la connexion systématique entre les concepts. L'étude d'une limite, par exemple, est constamment reliée aux propriétés des suites ou à la topologie des intervalles réels. Cette méthode renforce la vision globale de la discipline. Elle prépare l'élève à la pensée synthétique, compétence fondamentale requise pour la réussite de l'Examen d'État et des études supérieures scientifiques.

0.1.3. Finalité : L'Autonomie de l'Esprit Scientifique

Finalement, l'ambition de ce manuel est de former des esprits autonomes. L'objectif est de doter l'élève d'outils intellectuels robustes, lui permettant d'analyser, de démontrer et de résoudre des problèmes inédits. L'enseignant dispose ainsi d'un support pour guider les élèves, de la simple restitution vers la construction active du raisonnement scientifique. La résolution de problèmes devient alors la conséquence d'une pensée structurée, non la simple application d'un catalogue de recettes.

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

0.2. Profil de Sortie et Compétences Visées

0.2.1. Maîtrise des Fondamentaux Algébriques et Analytiques

Au terme de cette année, l'élève possède une maîtrise approfondie des structures algébriques fondamentales. Sa compétence se mesure par l'aptitude à manipuler avec rigueur les polynômes, les fractions rationnelles et les systèmes d'équations. Analytiquement, la notion de fonction est entièrement assimilée, des études de variations à la détermination des asymptotes. L'élève distingue et applique correctement les concepts de limite, de continuité et de dérivabilité.

0.2.2. Consolidation du Raisonnement Hypothético-Déductif

L'objectif central est la structuration de la pensée mathématique. L'élève construit des démonstrations valides, enchaînant les arguments logiques sans faille. Il justifie chaque étape de son raisonnement et identifie les hypothèses nécessaires à la validité d'une conclusion. Cette compétence dépasse la simple application de formules ; elle traduit une véritable appropriation du langage et de la méthode scientifiques.

0.2.3. Autonomie dans la Résolution de Problèmes

Finalement, l'élève démontre une autonomie accrue face à un problème inédit. Il est capable de traduire une situation concrète, issue de la physique, de la chimie ou de l'économie, en un modèle mathématique pertinent. Il sélectionne les outils d'algèbre ou d'analyse adéquats, les met en œuvre de manière stratégique et opère une analyse critique des résultats obtenus. La résolution devient une démarche intellectuelle structurée et non une simple restitution de connaissances.

0.3. Méthodologie et Approche par Situations

0.3.1. Primauté de la situation-problème

Chaque concept mathématique est introduit par une situation-problème concrète. Cette approche ancre l'apprentissage dans un contexte tangible, suscitant chez l'élève un besoin intellectuel précis. L'outil théorique abstrait émerge alors comme la solution logique à une difficulté identifiée, et non comme un postulat arbitraire. La situation initiale sert de catalyseur cognitif pour la conceptualisation.

0.3.2. Séquençage Didactique : Concret-Abstrait-Concret

Didactiquement, chaque chapitre est structuré selon une progression ternaire. - Une situation initiale ancre la problématique dans le réel (concret). - Le développement théorique formalise ensuite la notion et les outils mathématiques (abstrait). - Finalement, une série d'exercices d'application et de situations analogues valide l'acquisition de la compétence en la réinvestissant (concret).

Cette structure cyclique assure la transition permanente entre le sens pratique et la rigueur formelle de la discipline.

0.3.3. Posture de l'Enseignant : Facilitateur du Raisonnement

Conséquemment, la posture pédagogique de l'enseignant évolue. Il n'est plus un simple transmetteur de savoirs achevés. Il devient un facilitateur, guidant la réflexion de l'élève face à la situation-problème. Son intervention vise à aider l'élève à formuler des hypothèses, à structurer son raisonnement et à formaliser lui-même la solution mathématique. La transmission frontale du savoir est ainsi supplantée par un accompagnement à la construction de la connaissance.

Partie 1. Fondements Algébriques et Arithmétique des Polynômes

Au-delà des nombres, les mêmes règles

L'arithmétique des nombres entiers est une base connue. La division d'un nombre par un autre produit un quotient et un reste. Cette logique simple se transpose directement aux polynômes. Les opérations familières comme l'addition, la soustraction ou la multiplication trouvent ici un nouvel écho. Ce chapitre applique ces principes ancestraux à une nouvelle catégorie d'objets mathématiques, révélant une structure commune et puissante.

Les polynômes : des expressions bien ordonnées

Un polynôme est une somme de termes, chacun formé d'un coefficient et d'une puissance d'une variable X. Loin d'être un assemblage hasardeux, il possède une architecture précise définie par son degré, la plus haute puissance de X. Que les coefficients soient des réels, des complexes ou même des entiers, les polynômes forment des ensembles aux propriétés rigoureuses. Ils sont les véritables protagonistes de l'algèbre.

La division euclidienne : un algorithme central

Centralement, l'algorithme de la division euclidienne organise l'arithmétique des polynômes. Pour deux polynômes A et B, il garantit l'existence d'un unique couple quotient Q et reste R. Cette procédure mécanique, similaire à la division posée de l'école primaire à Mbandaka ou à Bukavu, est le moteur de nombreuses démonstrations. Sa maîtrise est une condition essentielle pour la suite.

Du PGCD à la factorisation : les objectifs finaux

L'application directe de la division est la recherche du Plus Grand Commun Diviseur (PGCD) de deux polynômes. L'algorithme d'Euclide, étendu à ces nouveaux objets, permet de le calculer efficacement. Cette quête du PGCD est fondamentale. Elle mène à la simplification des fractions rationnelles et, surtout, à la factorisation des polynômes. Trouver les racines d'une équation polynomiale revient souvent à bien la factoriser.

Chapitre 1. Logique Formelle et Langage Mathématique (MM4.1)

1.1. Syntaxe, Propositions et Valeurs de Vérité

a. Les fondations de la certitude

Un des faits les plus surprenants du langage courant est son ambiguïté. Une phrase comme "Je vais arriver bientôt" peut signifier 5 minutes pour une personne de Goma ou 2 heures pour quelqu'un pris dans les embouteillages de Kinshasa. Cette imprécision est impossible en mathématiques.

La logique formelle est précisément l'outil qui élimine cette confusion. Elle construit un langage artificiel, sans équivoque, où chaque affirmation possède une signification unique et une seule valeur possible : soit elle est vraie, soit elle est fausse. Il n'y a pas de "peut-être".

A. Proposition et Valeur de Vérité

Une affirmation qui peut être déclarée Vraie (V) ou Fausse (F) est une proposition. La valeur V ou F est sa valeur de vérité. Une proposition ne peut pas être à la fois vraie et fausse. C'est le principe du tiers exclu.

Les questions, les ordres ou les exclamations ne sont pas des propositions.

- "Le volcan Nyiragongo est en éruption." est une proposition. Sa valeur de vérité dépend de la réalité au moment de l'énonciation.
- "Quelle heure est-il ?" n'est pas une proposition. Elle ne déclare rien.
- "Ferme la porte !" n'est pas une proposition. C'est un ordre.

Figure 1 : Réf. IMG (9504-0967-7161) Diagramme simple illustrant une proposition et ses deux valeurs de vérité

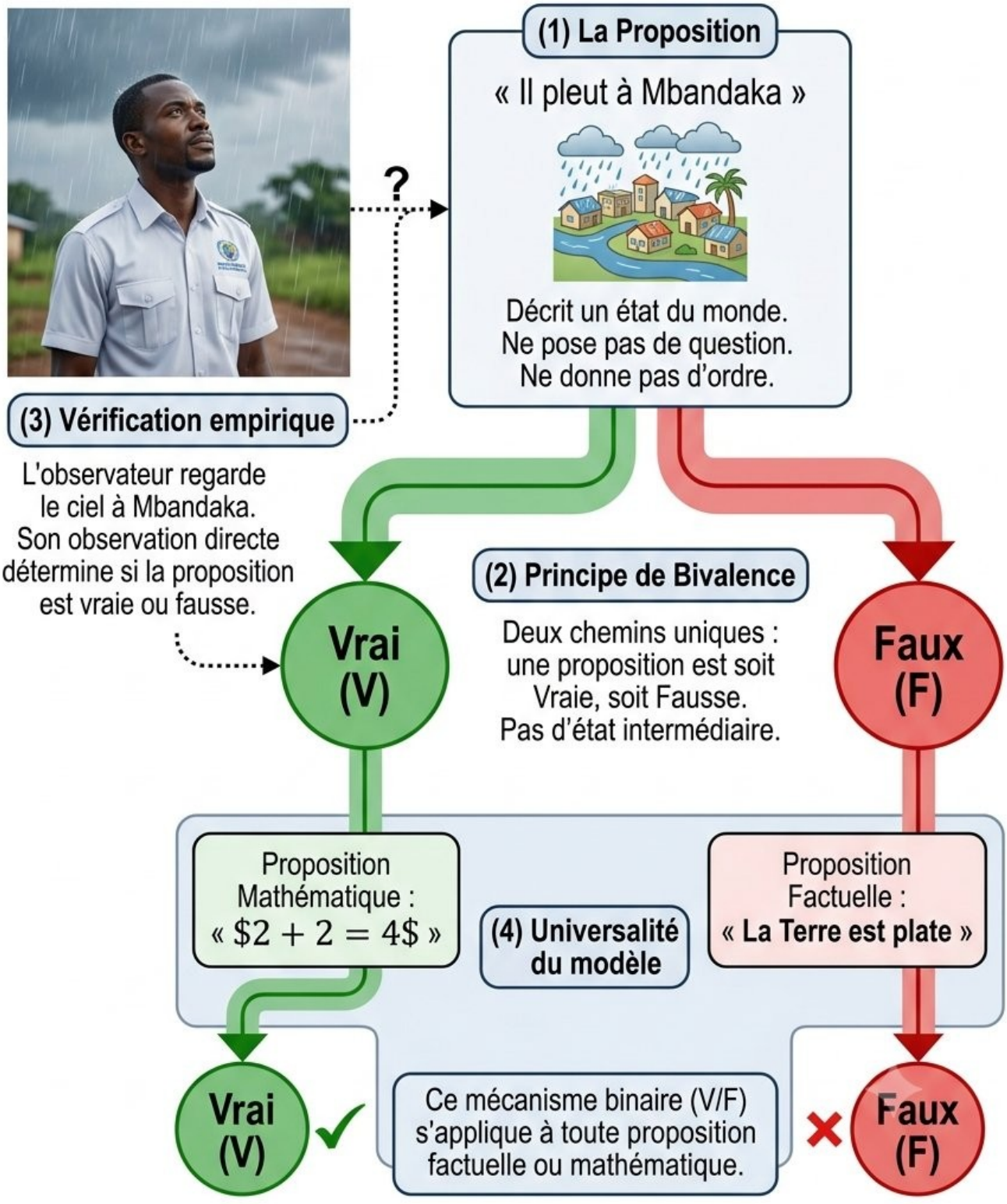


Figure 1 : Réf. IMG (9504-0967-7161)

Diagramme simple illustrant une proposition et ses deux valeurs de vérité

a. Le concept de proposition

Le schéma montre une affirmation centrale : "Il pleut à Mbandaka". Cette phrase est une proposition car elle décrit un état du monde. Elle ne pose pas de question et ne donne pas d'ordre. Son but est de déclarer un fait observable.

b. Le principe de bivalence

Deux chemins uniques partent de la proposition. L'un mène à "Vrai (V)", l'autre à "Faux (F)". Cela illustre le principe fondamental de la logique classique : une proposition ne peut avoir que l'une de ces deux valeurs. Il n'existe pas d'état intermédiaire.

c. La vérification empirique

La valeur de vérité de cette proposition spécifique est déterminée par l'observation directe. Pour savoir si "Il pleut à Mbandaka" est vraie, une personne sur place regarde simplement le ciel. La logique s'intéresse à la structure, pas à la vérification elle-même.

d. L'universalité du modèle

Ce modèle simple s'applique à n'importe quelle proposition mathématique ou factuelle. Que ce soit $2+2=4$ (Vrai) ou "La Terre est plate" (Faux), le mécanisme de décision binaire reste identique. C'est la base de tout raisonnement déductif.

■ ■ ■

B. Syntaxe et Connecteurs Logiques

Les propositions simples peuvent être combinées pour en former de plus complexes. Les mots qui les relient sont les connecteurs logiques. La manière de les agencer est la syntaxe.

Les trois connecteurs fondamentaux sont :

- La **négation** (non) : notée ¬. Elle inverse la valeur de vérité. Si P est Vraie, ¬P est Fausse.

- La **conjonction** (et) : notée ∧. La proposition P ∧ Q est Vraie uniquement si P et Q sont toutes les deux Vraies.
- La **disjonction** (ou) : notée ∨. La proposition P ∨ Q est Vraie si au moins l'une des deux propositions P ou Q est Vraie.

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

Figure 2 : Réf. IMG (0435-7133-3585)

Schéma des trois connecteurs logiques de base avec des cercles colorés

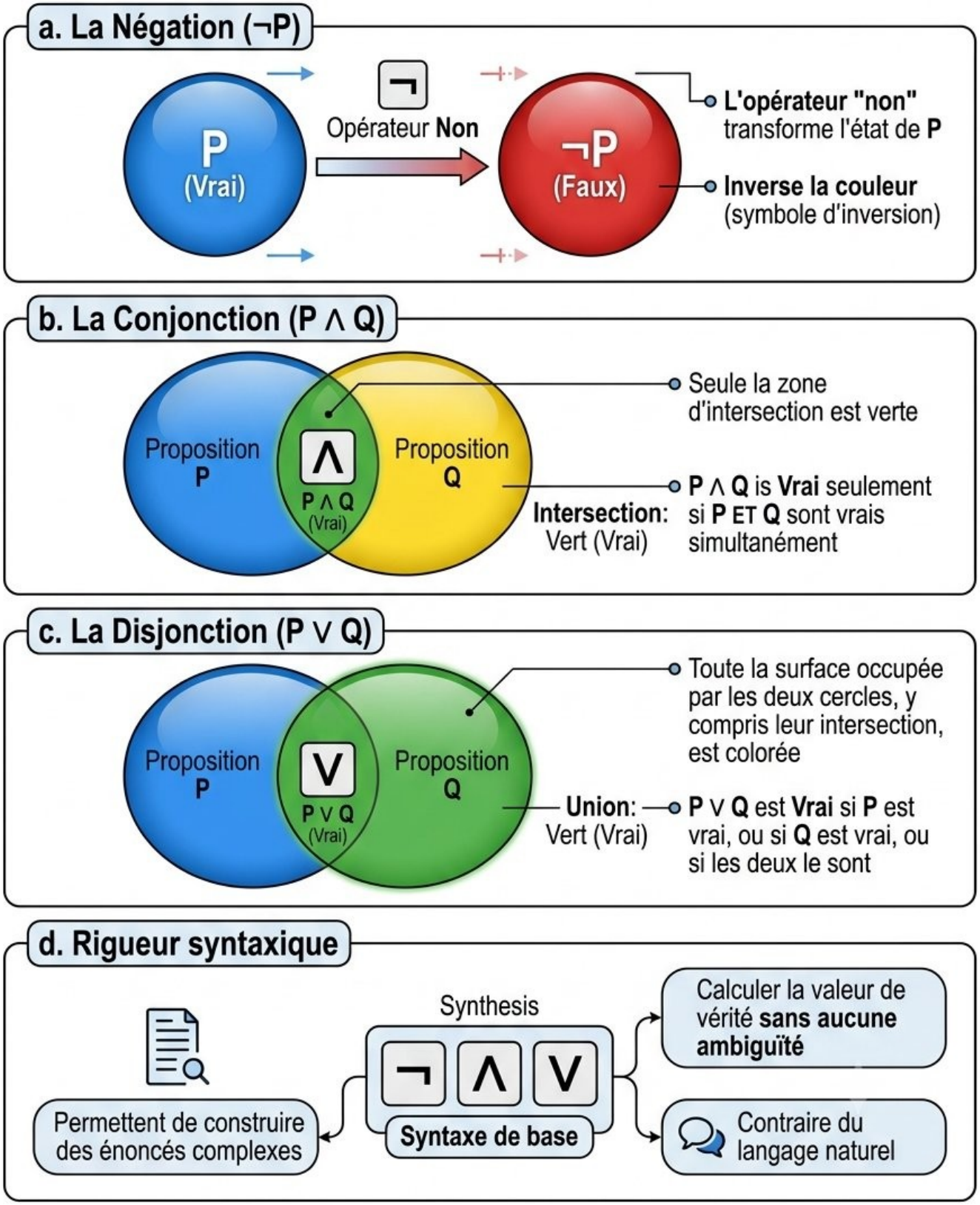


Figure 2 : Réf. IMG (0435-7133-3585)

Schéma des trois connecteurs logiques de base avec des cercles colorés

a. La Négation (¬P)

Un cercle bleu représente la proposition P (Vrai). À côté, un cercle rouge représente ¬P (Faux). Une flèche montre que l'opérateur "non" transforme l'état de P. Il inverse la couleur, symbolisant l'inversion de la valeur de vérité.

b. La Conjonction (P ∧ Q)

Deux cercles, un bleu (P) et un jaune (Q), se chevauchent. Seule la zone d'intersection est verte. Cela signifie que P ∧ Q n'est "Vrai" (vert) que si P ET Q sont vrais simultanément. Si l'un des deux est faux, le résultat est faux.

c. La Disjonction (P ∨ Q)

Les mêmes cercles bleu (P) et jaune (Q) se chevauchent. Ici, toute la surface occupée par les deux cercles, y compris leur intersection, est colorée. Cela montre que P ∨ Q est "Vrai" si P est vrai, ou si Q est vrai, ou si les deux le sont.

d. Rigueur syntaxique

Ces symboles (¬, ∧, ∨) et leurs règles d'usage forment la syntaxe de base. Ils permettent de construire des énoncés complexes dont la valeur de vérité peut être calculée sans aucune ambiguïté, contrairement au langage naturel.

C. Scénarios et Exercices

a. L'anecdote du marchand de Bukavu

Un vieux marchand du marché de Kadutu, au Sud-Kivu, était connu pour sa sagesse. Un jour, un jeune homme arrogant vient le défier : "Vieux père, tout ce que tu diras aujourd'hui sera un mensonge." Le marchand, après un long silence, le regarde et lui dit simplement : "Tu as raison."

Cette situation crée un paradoxe. Si le marchand dit la vérité en affirmant que le jeune a raison, alors sa propre affirmation ("Tu as raison") doit être un mensonge, comme l'a prédit le jeune. Mais si son affirmation est un

mensonge, alors le jeune a tort, et le marchand n'a pas dit la vérité. La logique formelle permet de décomposer ces pièges du langage pour analyser leur structure et révéler la contradiction.

Exercice 1 : Le marché de Matadi

Énoncé : Un inspecteur des prix arrive au grand marché de Matadi, au Kongo Central. Il entend plusieurs phrases. Identifiez lesquelles sont des propositions logiques.

1. "Le prix du manioc va augmenter demain."
2. "Ce sac de riz pèse 25 kg."
3. "Donne-moi le meilleur poisson !"
4. "Le pont Maréchal est-il ouvert à la circulation ?"
5. "La République Démocratique du Congo a plus de 20 provinces."

Résolution pas-à-pas :

1. **Étape 1 : Analyse de chaque phrase** On examine chaque phrase pour déterminer si elle est une déclaration (affirmative ou négative) qui peut être vérifiée comme vraie ou fausse.
2. **Étape 2 : Tri des propositions et non-propositions**
   - Phrase 1 : Proposition. C'est une affirmation sur le futur, qui sera soit vraie, soit fausse demain.
   - Phrase 2 : Proposition. C'est une affirmation vérifiable avec une balance. Elle est soit vraie, soit fausse.
   - Phrase 3 : Non-proposition. C'est un ordre (impératif). On ne peut pas dire s'il est "vrai" ou "faux".
   - Phrase 4 : Non-proposition. C'est une question. Elle attend une réponse, pas une valeur de vérité.
   - Phrase 5 : Proposition. C'est une affirmation factuelle sur la géographie administrative du pays, qui est Vraie (le pays en a 26).

Exercice 2 : La météo de Lubumbashi

Énoncé : Soit les deux propositions simples : * P : "Le ciel est dégagé à Lubumbashi." * Q : "La température est de 20°C."

Formulez en français les propositions complexes suivantes : $\neg P$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$.

Résolution pas-à-pas :

1. **Étape 1 : Formulation de la négation (¬P)** La négation ¬P inverse la proposition P. La phrase correspondante est : "Le ciel n'est pas dégagé à Lubumbashi."
2. **Étape 2 : Formulation de la conjonction (P ∧ Q)** La conjonction P ∧ Q lie les deux propositions avec "et". La condition est stricte : les deux doivent être vraies. La phrase est : "Le ciel est dégagé à Lubumbashi et la température est de 20°C."
3. **Étape 3 : Formulation de la disjonction (P ∨ Q)** La disjonction P ∨ Q lie les deux propositions avec "ou". Il suffit qu'au moins l'une des deux soit vraie. La phrase est : "Le ciel est dégagé à Lubumbashi ou la température est de 20°C."

1.2. Connecteurs Logiques et Tables de Vérité

a. La logique au cœur du débat

Pendant les palabres traditionnelles, la vérité d'une affirmation ne dépend pas seulement de sa propre valeur. Elle est souvent liée à une autre affirmation par un "si", un "et" ou un "ou". La logique formelle s'inspire de cette structure du langage humain. Elle transforme ces petits mots de liaison en outils mathématiques précis.

Ces outils, nommés connecteurs logiques, permettent de construire des raisonnements complexes à partir de phrases simples. Leur comportement est parfaitement prévisible. Ils sont la grammaire de la pensée mathématique, garantissant la cohérence d'une démonstration, de la première hypothèse à la conclusion finale.

A. Les connecteurs fondamentaux : Négation, Conjonction, Disjonction

Une proposition logique est une affirmation qui est soit Vraie (V), soit Fausse (F). Les connecteurs combinent ces propositions pour en former de nouvelles.

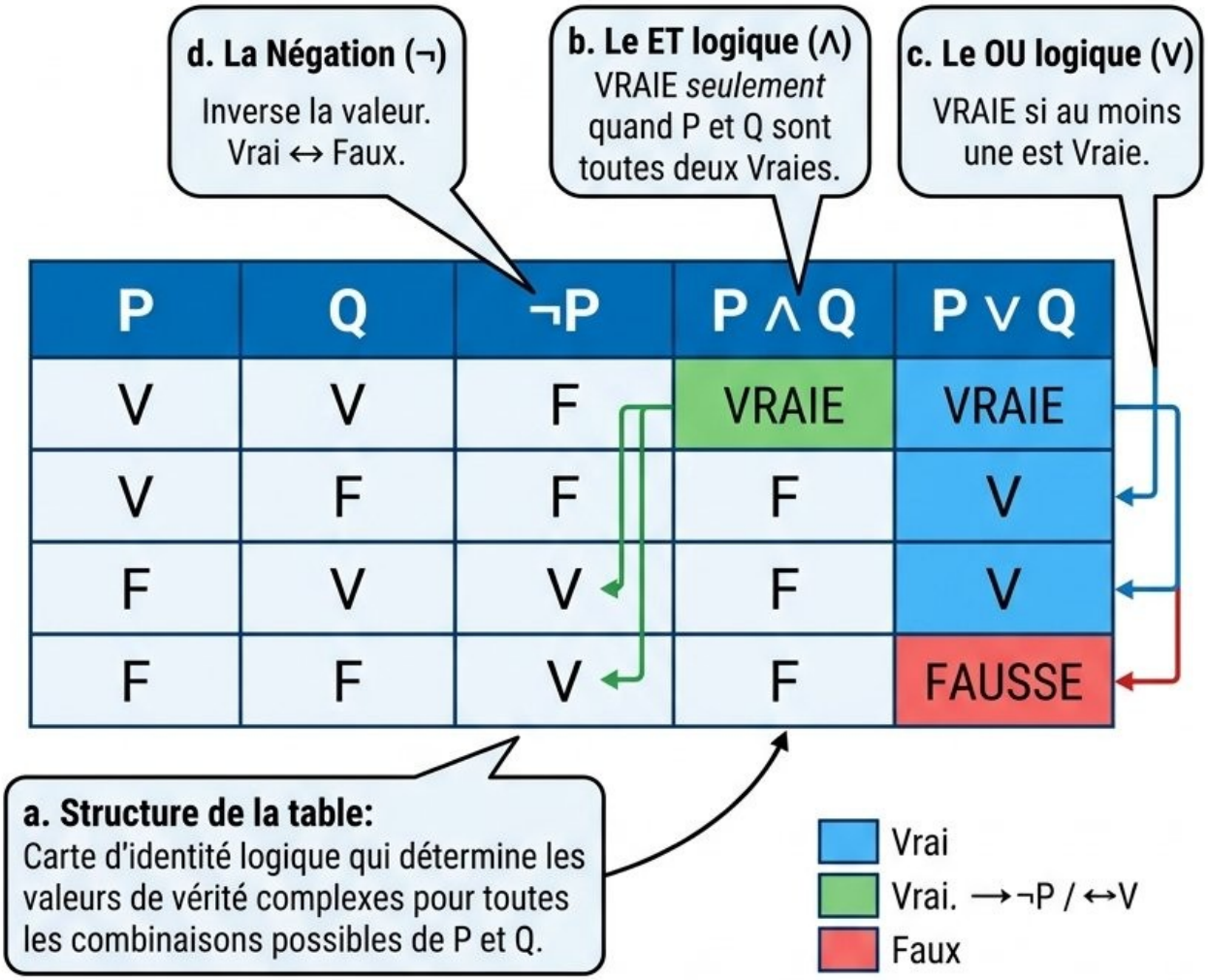
- **La Négation (non)** : notée $\neg P$. Elle inverse la valeur de vérité d'une proposition P. Si P est vraie, $\neg P$ est fausse.
- **La Conjonction (et)** : notée $P \wedge Q$. Elle est vraie uniquement si les deux propositions P et Q sont vraies en même temps.

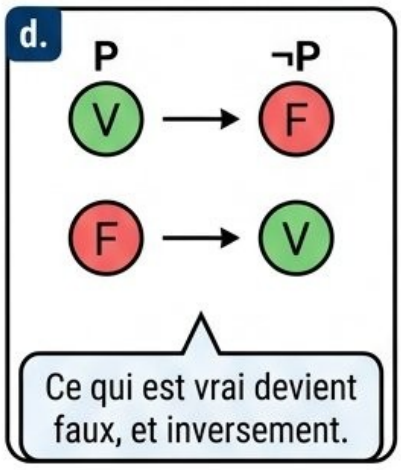
- **La Disjonction (ou)** : notée $P \vee Q$. Elle est vraie si au moins l'une des deux propositions P ou Q est vraie. Elle n'est fausse que si les deux sont fausses.

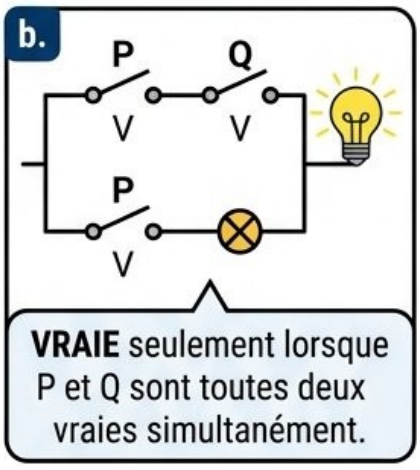
L'outil principal pour visualiser leur comportement est la table de vérité. Elle liste toutes les combinaisons de vérité possibles.

Figure 3 : Réf. IMG (4736-0407-7110)

Table de vérité résumant la négation, la conjonction et la disjonction







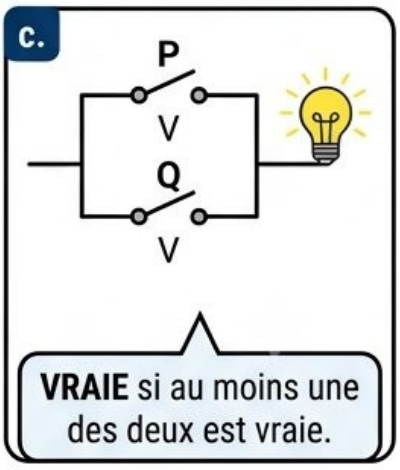


Figure 3 : Réf. IMG (4736-0407-7110)

Table de vérité résumant la négation, la conjonction et la disjonction

a. Structure de la table

Cette table représente visuellement la valeur de vérité (Vrai ou Faux) d'une proposition complexe. Chaque ligne correspond à une combinaison possible des valeurs de vérité des propositions simples P et Q. C'est une carte d'identité logique.

b. Le "ET" logique ($\wedge$)

La colonne $P \wedge Q$ montre que la conjonction est exigeante. Elle n'est VRAIE que dans un seul cas : lorsque P et Q sont toutes les deux vraies simultanément. Dans tous les autres cas, l'affirmation globale est fausse.

c. Le "OU" logique ($\vee$)

La colonne $P \vee Q$ illustre le disjonctif inclusif. La proposition est VRAIE si au moins une des deux, P ou Q, est vraie. Elle n'est fausse que si les deux sont fausses en même temps. C'est le connecteur de l'alternative.

d. La Négation ($\neg$)

La colonne $\neg P$ est la plus simple. Elle inverse systématiquement la valeur de vérité de P. Ce qui est vrai devient faux, et ce qui est faux devient vrai.

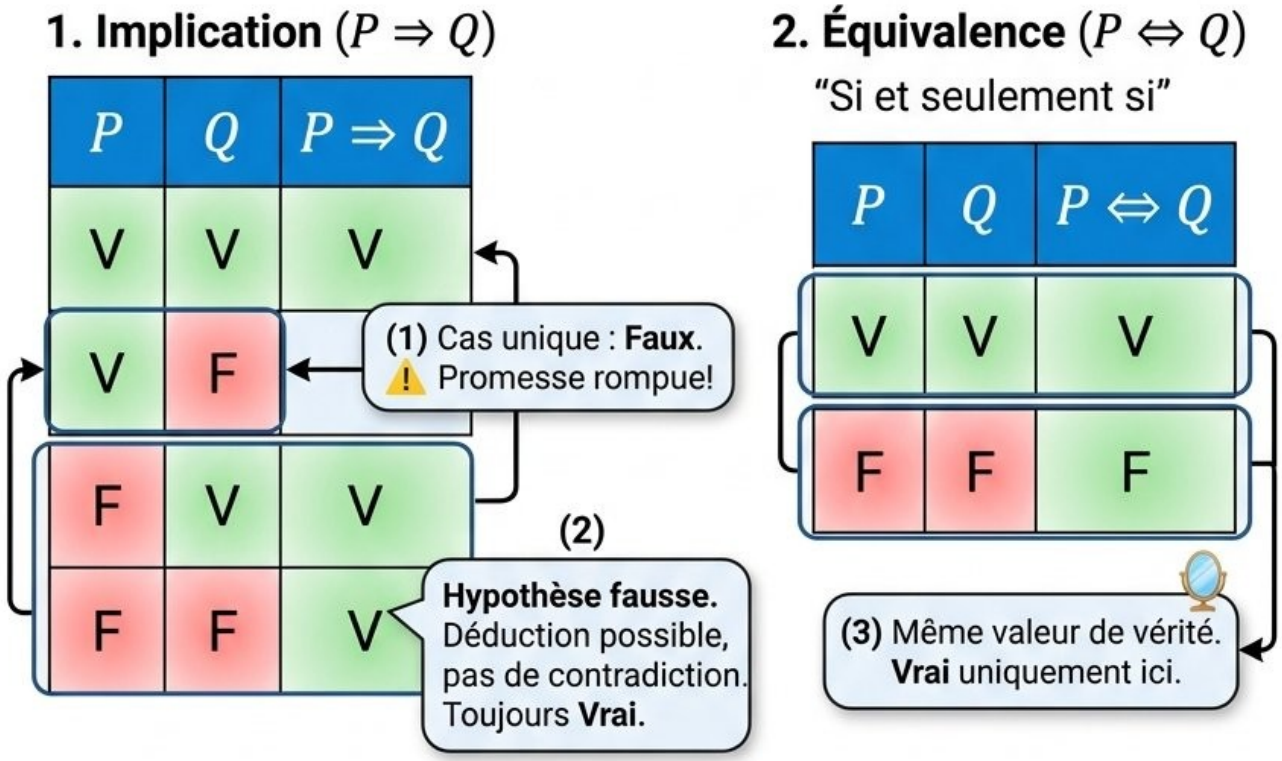
■ ■ ■

B. L'Implication et l'Équivalence

Ces deux connecteurs sont au cœur du raisonnement déductif.

- **L'Implication (si... alors...)** : notée $P \Rightarrow Q$. Cette proposition affirme que si P est vraie, alors Q doit l'être aussi. Elle n'est fausse que dans un seul cas : lorsque l'hypothèse P est vraie et la conclusion Q est fausse.
- **L'Équivalence (si et seulement si)** : notée $P \Leftrightarrow Q$. Elle est vraie uniquement lorsque P et Q ont la même valeur de vérité. Elles sont soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses.

Figure 4 : Réf. IMG (4509-9405-7165) Table de vérité illustrant les connecteurs d'implication et d'équivalence logique



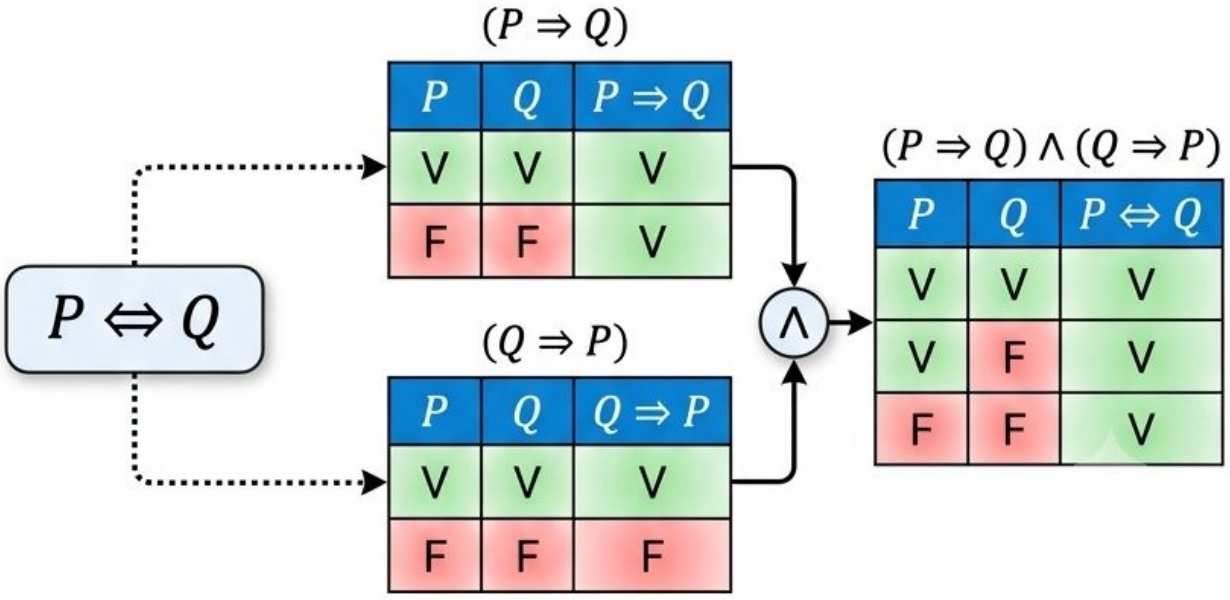


Figure 4 : Réf. IMG (4509-9405-7165)

Table de vérité illustrant les connecteurs d'implication et d'équivalence logique

a. Le cas de l'implication (⇒)

La table de l'implication $P \Rightarrow Q$ révèle sa nature. L'unique cas où l'implication est FAUSSE est lorsque l'hypothèse P est vraie mais que la conclusion Q est fausse. Une promesse est rompue.

b. L'hypothèse fausse

Quand l'hypothèse P est fausse (les deux dernières lignes), l'implication est toujours VRAIE. La logique stipule qu'à partir d'une prémisse fausse, on peut déduire n'importe quoi sans créer de contradiction. C'est un point fondamental et souvent contre-intuitif.

c. Le "si et seulement si" (⇔)

L'équivalence $P \Leftrightarrow Q$ agit comme un miroir. La proposition est VRAIE uniquement lorsque P et Q partagent la même valeur de vérité. Soit elles sont toutes les deux vraies, soit elles sont toutes les deux fausses.

d. Un lien fort

L'équivalence est une implication dans les deux sens. $P \Leftrightarrow Q$ est la même chose que $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

■ ■ ■

C. Scénarios et Exercices

L'anecdote de la panne à Mbandaka

Un technicien de la SNEL à Mbandaka, dans la province de l'Équateur, fait face à une panne générale dans un quartier. Son raisonnement est purement logique. Il pose l'hypothèse P : "Le transformateur principal est fonctionnel". Il pose l'hypothèse Q : "La ligne de distribution vers le quartier est intacte". L'affirmation pour avoir du courant est $P \wedge Q$. Si les habitants n'ont pas de courant, cela signifie que $\neg(P \wedge Q)$ est Vraie. En utilisant les lois logiques, cela équivaut à $\neg P \vee \neg Q$. Le technicien sait donc qu'il doit vérifier si le transformateur est en panne OU si la ligne est coupée. Il n'a pas besoin de chercher une troisième cause au départ. La logique a réduit son champ d'investigation.

Exercice 1 : Le choix du transporteur au Kasaï

Énoncé : Un transporteur de Mbuji-Mayi doit acheminer des marchandises. Soient les propositions : P : "Le camion a assez de carburant." Q : "La route vers Kananga est praticable." Traduire la proposition complexe R : "Le transport est possible si et seulement si le camion a assez de carburant et la route est praticable". Construire ensuite sa table de vérité.

Résolution pas-à-pas :

1. **Étape 1 : Traduction en langage logique** La proposition "le camion a assez de carburant et la route est praticable" se traduit par la conjonction $P \wedge Q$. L'expression "si et seulement si" indique une équivalence. La proposition R est donc : $R \Leftrightarrow (P \wedge Q)$. Pour l'exercice, nous construisons la table de $P \wedge Q$.

2. **Étape 2 : Construction de la table de vérité** On dresse une table avec toutes les combinaisons de V (Vrai) et F (Faux) for P et Q. On ajoute une colonne pour le résultat de $P \wedge Q$.

P | Q | $P \wedge Q$ |

|:**:/:**:|:**********:| | V | V | V | | V | F | F | | F | V | F | | F | F | F |

3. **Étape 3 : Interprétation du résultat** La table montre qu'il n'y a qu'une seule ligne où $P \wedge Q$ est Vraie. Le transporteur ne peut effectuer sa livraison que si les deux conditions (carburant ET route praticable) sont réunies. Si l'une ou l'autre manque, l'opération est impossible.

Exercice 2 : La condition de l'étudiant à Boma

Énoncé : Soit la proposition $P \Rightarrow Q$: "Si un étudiant réussit son examen de math (P), alors il passe en année supérieure (Q)". Déterminer la valeur de vérité de cette affirmation dans le cas où l'étudiant rate son examen de math (P est Faux) mais passe quand même en année supérieure grâce à la délibération du jury (Q est Vrai).

Résolution pas-à-pas :

1. **Étape 1 : Identification des valeurs de vérité** Selon l'énoncé, la proposition P ("l'étudiant réussit son examen de math") est Fausse (F). La proposition Q ("il passe en année supérieure") est Vraie (V).