ARITHMETIQUE

EDITION 2025

7è Année





TABLE DES MATIÈRES

PRÉLIMINAIRES **1**

0.1. Note pédagogique aux enseignants 1

- 0.1.1. De la perception concrète à l'abstraction 1
- 0.1.2. La primauté du raisonnement sur la mémorisation 1
- 0.1.3. L'évaluation formative comme outil de diagnostic 1

0.2. Profil d'entrée de l'élève 2

- 0.2.1. Maîtrise des acquis du cycle primaire 2
- 0.2.2. Compétences conceptuelles et procédurales 2
- 0.2.3. Aptitudes transversales et méthodologiques 2

0.3. Compétences globales visées 2

- 0.3.1. Maîtrise des concepts et des opérations fondamentales 2
- 0.3.2. Développement de la capacité de résolution de problèmes concrets 3
- 0.3.3. Structuration du raisonnement logique et déductif 3

0.4. Méthodologie et approche par situation 3

- 0.4.1. Principe de l'apprentissage situationnel 3
- 0.4.2. Démarche didactique en classe 4

PARTIE 1. LES NOMBRES ENTIERS NATURELS ET RELATIFS **5**

a. Compter, une nécessité universelle 5

b. L'invention capitale : le Zéro 5

c. Au-delà du Zéro : les dettes et les manques 5

d. Une grande famille : les Nombres Entiers Relatifs 5

CHAPITRE 1. SYSTÈMES DE NUMÉRATION ET PUISSANCES DANS N **6**

1.1. L'exponentiation et les puissances dans N 6

- a. L'accroche du chef sage 6
- A. Définition de la puissance 6

FIGURE 1 : RÉF. IMG (0150-8249-5134) **7**

Décomposition visuelle de la puissance 3 exposant 4 en facteurs 7

- B. Lecture et cas particuliers 7

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

FIGURE 2 : RÉF. IMG (5444-8407-2267) **10**

Tableau récapitulatif des cas particuliers pour les exposants 0 et 1 10

- C. Scénarios et Exercices 10

1.2. Les polynômes arithmétiques 12

- a. Une chaîne de calculs 12
- A. Qu'est-ce qu'un polynôme arithmétique ? 12
- B. L'ordre de priorité des opérations 12

FIGURE 3 : RÉF. IMG (6399-0746-0457) **15**

Hiérarchie des calculs, du plus important au moins important 15

- Scénarios et Exercices 15

1.3. Numération en base quelconque et conversion 17

- a. L'idée derrière les bases 17
- A. Définition d'une base de numération 17

FIGURE 4 : RÉF. IMG (1300-3398-1469) **19**

Schéma montrant le regroupement de 13 objets en base 5 19

- B. Les deux sens de la conversion 19

FIGURE 5 : RÉF. IMG (2630-1176-5188) **22**

Algorithme de conversion de 27 en base 4 par divisions successives 22

- Scénarios et Exercices 22
- Anecdote : Le troc et les bases anciennes 22

CHAPITRE 2. OPÉRATIONS ET DIVISIBILITÉ DANS N **25**

2.1. Propriétés des opérations fondamentales dans N 25

- a. Une question d'ordre 25
- A. L'Addition et la Multiplication : les opérations amicales 25

FIGURE 6 : RÉF. IMG (9700-3988-6483) **27**

La commutativité de l'addition illustrée avec des bidons d'huile 27

- B. Les Éléments Spéciaux 27
- C. La Distributivité : le pont entre les opérations 27

FIGURE 7 : RÉF. IMG (7953-7377-1990) **29**

La distributivité expliquée avec des rangées de plants de café 29

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

- D. Les opérations exigeantes : Soustraction et Division....29

2.2. La division euclidienne....31

- a. L'art du partage....31
- A. Les quatre acteurs du partage....31

FIGURE 8 : RÉF. IMG (3283-5585-0624)....32

Un partage de sacs de maïs dans un village du Kasaï....32

- B. La formule sacrée et sa condition....32

FIGURE 9 : RÉF. IMG (3900-3922-0040)....34

Schéma de la formule de la division euclidienne a = bq + r....34

- Une question de transport à Matadi....34

2.3. Critères de divisibilité, nombres premiers et décomposition....36

- a. Le secret des partages réussis....36
- A. Les critères de divisibilité : les raccourcis du calcul....36

FIGURE 10 : RÉF. IMG (8460-8769-1759)....38

Tableau simple montrant les critères de divisibilité pour 2, 3, 5....38

- B. Les nombres premiers : les briques de l'arithmétique....38

FIGURE 11 : RÉF. IMG (9880-0787-7759)....40

Le Crible d'Ératosthène visualisant les premiers nombres premiers....40

- C. La décomposition en produit de facteurs premiers....40

CHAPITRE 3. INTRODUCTION AUX NOMBRES ENTIERS RELATIFS....43

3.1. Construction et nécessité de l'ensemble Z....43

- a. L'argent, la température et les dettes....43
- A. La limite des nombres entiers naturels (ℕ)....43
- B. La naissance des nombres entiers relatifs (ℤ)....43

FIGURE 12 : RÉF. IMG (4156-0252-3704)....46

La droite numérique, une route infinie dans deux directions opposées....46

- SCÉNARIOS ET EXERCICES....46

3.2. Représentation, ordre et valeur absolue dans Z....47

- a. Le chaud et le froid comme guide....47
- A. La droite numérique : le territoire des entiers....48

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

FIGURE 13 : RÉF. IMG (9881-0529-7153) **50**

La droite numérique des entiers relatifs avec le point zéro 50

- B. Comparer les entiers : la règle du plus fort 50
- C. La valeur absolue : la distance sans le signe 51
- SCÉNARIOS ET EXERCICES 51

3.3. Repérage dans le plan cartésien 52

- a. L'adresse d'un point 52
- A. Les deux axes et l'origine 52

FIGURE 14 : RÉF. IMG (7488-5472-4145) **55**

Le plan cartésien avec ses deux axes et son origine 55

- B. Les coordonnées d'un point 55

FIGURE 15 : RÉF. IMG (6625-4789-4615) **57**

Placer un point P de coordonnées (x,y) dans le plan 57

- Scénarios et Exercices 57
- Une partie de bataille navale à Kisangani 57

PARTIE 2. OPÉRATIONS SUR LES RELATIFS ET NOMBRES DÉCIMAUX **59**

Des nombres avec un signe 59

La précision de la virgule 59

Additionner, soustraire, multiplier, diviser 59

Un outil pour le quotidien et la science 59

CHAPITRE 4. OPÉRATIONS FONDAMENTALES DANS Z **60**

4.1. Addition des entiers relatifs 60

- a. Introduction : gains et pertes 60
- A. Addition de deux nombres de même signe 60

FIGURE 16 : RÉF. IMG (9633-6626-4488) **61**

Addition de nombres positifs et négatifs sur une droite numérique 61

- B. Addition de deux nombres de signes contraires 61

FIGURE 17 : RÉF. IMG (5606-7787-0340) **63**

Le principe de compensation entre un gain et une perte 63

- C. Scénarios et Exercices 63

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

4.2. Soustraction des entiers relatifs et notion de distance....65
- a. Le paradoxe de la soustraction....65
- A. La règle d'or de la soustraction dans Z....65

FIGURE 18 : RÉF. IMG (6521-7854-5492)....67

Droite numérique illustrant la soustraction d'un nombre négatif....67
- B. La distance entre deux points....67

4.3. Sommes algébriques, parenthèses et priorités opératoires....69
- a. L'ordre secret des calculs....69
- A. La suppression des parenthèses....70
- B. La hiérarchie des opérations....71

FIGURE 19 : RÉF. IMG (8969-6563-7984)....73

Une pyramide illustrant la priorité des opérations mathématiques (PEMDAS)....73
- L'ordre du jeu de cartes à Boma....73

CHAPITRE 5. STRUCTURE MULTIPLICATIVE DANS Z....76

5.1. Multiplication des entiers relatifs et règle des signes....76
- a. L'accroche....76
- A. La règle des signes : la boussole du calcul....76

FIGURE 20 : RÉF. IMG (9389-2843-1826)....78

Visualisation de la multiplication de deux nombres de signes identiques....78
- B. Propriétés de la multiplication dans Z....78

FIGURE 21 : RÉF. IMG (9779-3989-4244)....81

Représentation de la multiplication de deux nombres de signes contraires....81
- b. Au marché de Matadi....81

5.2. Division exacte dans Z....82
- a. Introduction....82
- A. Définition et vocabulaire de la division exacte....83
- B. Règle des signes pour la division....83

FIGURE 22 : RÉF. IMG (0703-8504-0835)....85

Schéma illustrant la règle des signes pour la division des entiers....85
- b. La dette du pêcheur de Mbandaka....85

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

5.3. Puissances, carrés et racines carrées dans Z....87
- a. Une simplification venue du passé....87
- A. La puissance d'un entier relatif....87
- B. Le carré et la racine carrée....87

FIGURE 23 : RÉF. IMG (1015-8740-0035)....90

Visualisation d'un carré parfait et de sa racine carrée....90
- b. Scénarios et Exercices....90

CHAPITRE 6. LES NOMBRES DÉCIMAUX ARITHMÉTIQUES....92

6.1. Concept, écriture et structure des nombres décimaux....92
- a. Une virgule pour tout changer....92
- A. Définition et structure d'un nombre décimal....92

FIGURE 24 : RÉF. IMG (0585-9630-4766)....94

Décomposition d'un nombre décimal avec la valeur de chaque chiffre....94
- B. Différentes écritures d'un nombre décimal....94

6.2. Ordre, encadrement et valeurs approchées....96
- a. La précision des anciens....96
- A. Comparer et ordonner les nombres décimaux....96
- B. Encadrer un nombre décimal....97

FIGURE 25 : RÉF. IMG (0498-5123-3517)....98

Règle graduée montrant l'encadrement d'un nombre décimal entre deux valeurs....98
- C. Troncature et arrondi d'un nombre décimal....98
- Scénarios et Exercices....99

6.3. Applications : le système métrique et les conversions....100
- a. L'accroche : une mesure pour tous....100
- A. La logique décimale derrière les conversions....101

FIGURE 26 : RÉF. IMG (4253-7131-4886)....103

Tableau de conversion des unités de longueur, du kilomètre au millimètre....103
- B. Le même principe pour les masses et les capacités....103

FIGURE 27 : RÉF. IMG (9438-2433-9283)....104

Tableau de conversion des unités de masse, du kilogramme au milligramme....104
- Une histoire de planches à Mbandaka....104

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

CHAPITRE 7. OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES DÉCIMAUX.....106

7.1. Addition et soustraction des nombres décimaux.....106

- a. Le secret de la virgule.....106
- A. L'addition : l'art de l'alignement.....106

FIGURE 28 : RÉF. IMG (8830-7910-7931).....108

Visualisation de l'alignement des virgules pour une addition de nombres décim.....108

- B. La soustraction : une logique identique.....108

FIGURE 29 : RÉF. IMG (2007-4399-1385).....111

Méthode de soustraction de nombres décimaux avec ajout d'un zéro.....111

- SCÉNARIOS ET EXERCICES.....111

7.2. Multiplication et division des nombres décimaux.....113

- a. L'omniprésence des virgules.....113
- A. La multiplication des nombres décimaux.....113
- B. La division des nombres décimaux.....114

FIGURE 30 : RÉF. IMG (3645-3511-2895).....116

Visualisation de la multiplication de nombres décimaux par une aire.....116

- C. Scénarios et Exercices.....116

7.3. Problèmes d'application (commerce, environnement).....118

- a. Les mathématiques du quotidien.....118
- A. Les Décimaux dans le Commerce.....118

FIGURE 31 : RÉF. IMG (4854-6465-5897).....119

Maman commerçante vendant du tissu au marché de Matadi au Kongo Central.....119

- B. Les Décimaux et l'Environnement.....119

PARTIE 3. FRACTIONS ET PROPORTIONNALITÉ.....122

a. Le partage, une idée simple.....122

b. Le langage des fractions : numérateur et dénominateur.....122

c. La proportionnalité, une relation logique.....122

d. Le lien entre fractions et proportionnalité.....122

CHAPITRE 8. NOTIONS FONDAMENTALES SUR LES FRACTIONS.....123

8.1. Concept de fraction et représentations.....123

- a. Une introduction au partage....123
- A. Définition et Vocabulaire....123
- B. Les trois représentations d'une fraction....123

8.2. Simplification et comparaison des fractions....125
- a. Une question de partage équitable....125
- A. Simplifier une fraction : l'art de la rendre irréductible....126

FIGURE 32 : RÉF. IMG (7436-4864-4504)....128

Simplification d'une fraction illustrée par des parts de chikwangue....128
- B. Comparer deux fractions : qui a la plus grande part ?....128

FIGURE 33 : RÉF. IMG (7043-4825-8574)....131

La méthode du produit en croix pour comparer deux fractions....131
- Scénarios et Exercices....131

8.3. Passage de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale....133
- a. Une division cachée....133
- A. La division : l'unique méthode....133

FIGURE 34 : RÉF. IMG (6441-6774-0822)....136

La division posée pour convertir la fraction trois quarts en décimal....136
- B. Les deux types de résultats décimaux....136

FIGURE 35 : RÉF. IMG (1593-6065-4229)....137

Comparaison entre un nombre décimal fini et un nombre décimal périodique....137
- Scénarios et Exercices....137
- Une anecdote de chantier à Lubumbashi....137

CHAPITRE 9. OPÉRATIONS SUR LES FRACTIONS DANS Q....140

9.1. Addition et soustraction des fractions....140
- a. Le partage comme point de départ....140
- A. Additionner et soustraire des fractions de même dénominateur....140

FIGURE 36 : RÉF. IMG (7792-2563-9111)....141

Addition de deux fractions ayant un dénominateur commun : huitièmes....141
- B. Additionner et soustraire des fractions de dénominateurs différents....141

FIGURE 37 : RÉF. IMG (9353-6100-8763)....144

Réduction de fractions au même dénominateur avant une addition complexe.....144
- b. L'anecdote du champ de manioc.....144

9.2. Multiplication, division et inverse d'une fraction.....146
- a. Le partage du champ.....146
- A. La multiplication de deux fractions.....146

FIGURE 38 : RÉF. IMG (8084-8859-0043).....149

Visualisation de la multiplication de deux fractions sur un carré.....149
- B. L'inverse d'une fraction.....149
- C. La division de deux fractions.....150

9.3. Problèmes de partage et de mélange.....153
- a. L'arithmétique du quotidien.....153
- A. Le partage d'un tout (L'unité).....153
- B. Le mélange de plusieurs parties.....154

FIGURE 39 : RÉF. IMG (8980-6290-7512).....156

Représentation du mélange de deux liquides de volumes fractionnaires.....156
- b. Anecdote : La Pêche Miraculeuse de Mbandaka.....156

CHAPITRE 10. PROPORTIONNALITÉ ET APPLICATIONS.....159

10.1. Grandeurs proportionnelles et coefficient de proportionnalité.....159
- a. Une logique universelle.....159
- A. Les grandeurs directement proportionnelles.....159

FIGURE 40 : RÉF. IMG (0425-4913-5627).....161

Tableau de proportionnalité simple pour des sacs de maïs à Kananga.....161
- B. Le coefficient de proportionnalité.....161

FIGURE 41 : RÉF. IMG (0290-5638-5329).....162

Calcul du coefficient de proportionnalité pour le prix des beignets.....162
- Anecdote : La course des pirogues sur le fleuve Congo.....162
- Scénarios et Exercices.....163

10.2. Applications commerciales : pourcentages et intérêts.....164
- a. Un outil du quotidien.....164
- A. Le pourcentage, un rapport sur 100.....164
- B. L'intérêt simple, le loyer de l'argent.....164

FIGURE 42 : RÉF. IMG (0899-0158-9991)..... 167

Une étiquette de prix affichant une réduction en pourcentage sur un produit..... 167

- Scénarios et Exercices..... 167

10.3. Applications géométriques et physiques : échelles, vitesse, débit..... 169

- a. Le secret des grandeurs proportionnelles..... 169
- A. L'échelle : réduire ou agrandir le monde réel..... 169
- B. La vitesse : une affaire de distance et de temps..... 170
- C. Le débit : mesurer un écoulement..... 170

ANNEXES..... 173

1. Table des notations mathématiques..... 173
   - A. Symboles des opérations arithmétiques fondamentales..... 173
   - B. Symboles de relation et de comparaison..... 174
   - C. Notations des ensembles de nombres..... 174
   - D. Notations de la théorie des ensembles..... 175
   - E. Délimiteurs et symboles divers..... 175
2. Grilles de conversion des unités..... 176
   - A. Les Unités de Longueur (Système métrique décimal)..... 176
   - B. Les Unités de Masse..... 177
   - C. Les Unités de Capacité..... 177
   - D. Les Unités d'Aire..... 178
   - E. Les Unités de Volume..... 178
   - F. Les Unités de Temps..... 179
3. Liste des nombres premiers usuels..... 179
   - A. Définition et Propriétés Fondamentales..... 179
   - B. Identification des Nombres Premiers..... 180
   - C. Liste exhaustive des nombres premiers jusqu'à 1000..... 181
4. Canevas de résolution de problèmes..... 182
   - A. La Modélisation du Problème : De l'Énoncé à l'Équation..... 182
   - B. La Structuration de la Résolution..... 183
   - C. L'Exécution et la Vérification..... 184

PRÉLIMINAIRES

0.1. Note pédagogique aux enseignants

0.1.1. De la perception concrète à l'abstraction

L'arithmétique en 7ème année d'éducation de base formalise la transition de l'élève du calcul utilitaire vers le raisonnement mathématique. Chaque concept nouveau doit impérativement s'ancrer dans une situation matérielle, observable et quantifiable. Les exemples tirés du quotidien (un partage de récolte au Kasaï, le calcul d'une distance sur le fleuve Congo, la gestion d'un budget pour le marché de Goma) précèdent systématiquement l'introduction des symboles et des opérations abstraites. Cette démarche graduelle consolide la numératie en la reliant au monde sensible de l'élève.

0.1.2. La primauté du raisonnement sur la mémorisation

Un objectif central est le développement de la logique déductive. L'application mécanique d'une formule ou d'un algorithme sans en comprendre la structure interne est un échec pédagogique. La résolution de problèmes doit valoriser la verbalisation de la stratégie par l'élève. L'enseignant guide l'apprenant à justifier ses étapes, à expliquer pourquoi une opération est pertinente dans un contexte donné. La maîtrise du "pourquoi" conditionne la capacité future de l'élève à transposer ses compétences à des problèmes inédits.

0.1.3. L'évaluation formative comme outil de diagnostic

Les exercices proposés dans cet ouvrage ont une double fonction. Ils permettent la consolidation des acquis, mais servent avant tout d'instrument de diagnostic pour l'enseignant. Une erreur récurrente sur un type d'opération signale une faille dans la compréhension d'un concept fondamental. L'évaluation devient alors formative. Elle oriente l'action pédagogique vers une remédiation ciblée plutôt que vers une sanction. La progression est ainsi assurée par un ajustement constant de l'enseignement aux besoins réels observés dans la classe.

0.2. Profil d'entrée de l'élève

0.2.1. Maîtrise des acquis du cycle primaire

L'élève entrant en 7ème année est supposé détenir une maîtrise solide des compétences fondamentales du cycle primaire. Cette maîtrise inclut la numération des entiers naturels et des nombres décimaux simples. Sur le plan opératoire, l'élève doit pouvoir exécuter avec une aisance raisonnable les quatre opérations arithmétiques fondamentales : addition, soustraction, multiplication et division. La résolution de problèmes simples impliquant ces opérations dans des contextes familiers est également un prérequis essentiel.

0.2.2. Compétences conceptuelles et procédurales

Au-delà de la simple exécution mécanique, le profil de l'élève intègre une compréhension conceptuelle de base. Il s'agit de sa capacité à interpréter le sens des opérations et à choisir la procédure adéquate face à une situation-problème. L'élève doit avoir une première intuition des notions de fractions comme partage d'une unité et être capable d'effectuer des comparaisons simples. Sa compétence procédurale lui permet de suivre un algorithme de calcul structuré, notamment pour la division euclidienne ou la multiplication à plusieurs chiffres.

0.2.3. Aptitudes transversales et méthodologiques

Finalement, le profil d'entrée évalue des aptitudes qui préparent l'élève au raisonnement plus abstrait du cycle secondaire. Sa capacité à lire et extraire les données pertinentes d'un énoncé court est primordiale. L'élève doit faire preuve d'une organisation minimale dans la présentation de ses calculs. Une curiosité naissante pour la structure des nombres et une disposition à vérifier la plausibilité d'un résultat sont des indicateurs favorables pour aborder les nouveaux concepts arithmétiques.

0.3. Compétences globales visées

0.3.1. Maîtrise des concepts et des opérations fondamentales

La finalité première est l'acquisition par l'élève d'une connaissance solide des ensembles de nombres (N, Z, D, Q). Cette maîtrise inclut la compréhension profonde des quatre opérations arithmétiques fondamentales et de leurs propriétés. L'élève doit pouvoir exécuter des calculs avec exactitude et rapidité. Il doit également être capable de justifier les propriétés des

opérations, comme la commutativité, l'associativité et la distributivité, qui structurent l'ensemble des calculs. La manipulation des fractions et des nombres décimaux constitue un pilier de cette compétence.

0.3.2. Développement de la capacité de résolution de problèmes concrets

Au-delà du calcul pur, le programme vise à outiller l'élève pour la modélisation mathématique simple. Il apprendra à traduire une situation-problème, issue d'un contexte tangible, en une ou plusieurs expressions arithmétiques. La compétence centrale est la capacité à identifier les données pertinentes, à choisir l'opération adéquate et à interpréter la validité du résultat obtenu. Cette démarche transforme l'arithmétique en un outil fonctionnel d'analyse du réel, préparant l'élève à une application pratique des savoirs.

0.3.3. Structuration du raisonnement logique et déductif

L'enseignement de l'arithmétique en 7ème année pose les fondations du raisonnement scientifique. L'élève est conduit à organiser sa pensée, à formuler des hypothèses simples et à valider ses démarches étape par étape. Progressivement, il développe une rigueur intellectuelle qui lui permet de justifier chaque ligne d'un calcul ou d'une démonstration élémentaire. Cette compétence prépare directement l'élève aux exigences de l'abstraction mathématique et aux disciplines scientifiques des cycles supérieurs.

0.4. Méthodologie et approche par situation

0.4.1. Principe de l'apprentissage situationnel

L'approche par situation ancre l'apprentissage de l'arithmétique dans le réel. Elle postule que la construction d'un concept mathématique émerge de la résolution d'une situation-problème. Face à un défi concret, l'élève est conduit à mobiliser ses acquis, à identifier ses lacunes et à formuler des hypothèses. La connaissance n'est plus une information transmise de manière verticale. Elle devient une réponse fonctionnelle à un questionnement authentique. Le rôle de l'enseignant se transforme. Il orchestre les activités et guide la conceptualisation, faisant de l'élève l'acteur principal de son savoir. La validité d'une notion s'éprouve par son utilité pratique immédiate.

0.4.2. Démarche didactique en classe

La mise en œuvre de cette méthodologie suit une progression rigoureuse en plusieurs temps. Initialement, l'enseignant présente une situation complexe mais accessible, issue du quotidien de l'élève (gestion d'un budget familial, partage de récoltes au Kasaï, calcul de distances entre Boma et Matadi). S'ensuit une phase de recherche où les élèves, seuls ou en groupes, explorent des stratégies de résolution. L'erreur y est considérée comme une étape constructive du raisonnement. Puis, une mise en commun structurée, dirigée par l'enseignant, permet de confronter les procédures. C'est le moment de l'institutionnalisation du savoir : la règle, la formule ou la propriété est formellement établie. Finalement, une phase de réinvestissement consolide l'acquis par des exercices d'application systématique et de transfert à de nouveaux contextes.

Partie 1. Les Nombres Entiers Naturels et Relatifs

a. Compter, une nécessité universelle

Un agriculteur du Kasaï compte ses sacs de maïs. Un marchand de Bukavu vérifie sa caisse. Partout, l'être humain a besoin de dénombrer des objets concrets. Les nombres utilisés pour cette tâche sont les entiers naturels : 0, 1, 2, 3, et ainsi de suite. Ils forment la base de tout calcul. Ils décrivent une quantité qui existe, une possession que l'on peut toucher ou voir.

b. L'invention capitale : le Zéro

Le zéro possède un statut particulier. Il indique une absence, comme un stock de poissons vide à Bumba, sur le fleuve Congo. Sa plus grande force est de marquer une position. Dans le nombre 105, le zéro assure que le 1 représente bien une centaine. Sans lui, notre système décimal serait inutilisable. Il est le point d'équilibre, le centre de la droite numérique.

c. Au-delà du Zéro : les dettes et les manques

Certaines situations exigent de descendre sous le niveau zéro. Un commerçant de Goma qui a une dette de 5 000 francs congolais possède un solde négatif. Ce manque est représenté par le nombre -5000. Ces nombres, précédés du signe "moins" (-), sont les entiers négatifs. Ils décrivent une perte, une profondeur sous le niveau de la mer ou une température hivernale.

d. Une grande famille : les Nombres Entiers Relatifs

L'union des entiers naturels (positifs) et des entiers négatifs forme une seule et grande famille : les nombres entiers relatifs. Cet ensemble, noté **Z**, permet de modéliser le monde avec plus de précision. On peut y décrire une altitude au-dessus de Lubumbashi (positive) ou une profondeur dans le Lac Tanganyika (négative). Chaque nombre positif y trouve son opposé négatif.

Chapitre 1. Systèmes de Numération et Puissances dans N

1.1. L'exponentiation et les puissances dans N

a. L'accroche du chef sage

Pendant une grande famine dans le Kasaï, un chef sage promit une récompense à celui qui trouverait une solution. Un jeune homme apporta un seul grain de mil et proposa un marché : un grain le premier jour, deux le deuxième, quatre le troisième, et ainsi de suite pendant un mois, en doublant la quantité chaque jour.

Le chef, amusé par cette demande si modeste, accepta sans réfléchir. Il comprit trop tard que cette suite de multiplications par deux allait vider toutes les réserves du royaume. Cette histoire illustre la force cachée des puissances, une opération mathématique simple mais très efficace.

A. Définition de la puissance

Une puissance est une manière courte d'écrire une multiplication répétée du même nombre par lui-même. Elle se compose de deux parties.

- **La base** : le nombre qui est multiplié.
- **L'exposant** : le nombre de fois que la base est multipliée par elle-même.

La notation a^n se lit "a exposant n" ou "a puissance n". Elle représente le produit de n facteurs égaux à a.

$$a^n = a \times a \times a \times \ldots \times a$$

Par exemple, 3^4 signifie que le nombre 3 (la base) est multiplié 4 fois (l'exposant) par lui-même.

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

Figure 1 : Réf. IMG (0150-8249-5134)

Décomposition visuelle de la puissance 3 exposant 4 en facteurs

a. Le socle de la puissance : la base

La base est le nombre fondamental de l'opération. Dans l'expression 3^4, la base est 3. C'est le nombre que nous allons répéter. Si nous parlons de la population d'un village qui double chaque année, la base de cette croissance est 2. La base est le pilier sur lequel repose tout le calcul de la puissance. Elle indique "quel nombre" multiplier.

b. Le chef d'orchestre : l'exposant

L'exposant est le petit nombre écrit en haut à droite de la base. Dans 3^4, l'exposant est 4. Il donne l'ordre, il indique "combien de fois" la base doit apparaître dans la multiplication. Un exposant plus grand signifie une multiplication répétée un plus grand nombre de fois, et donc un résultat souvent beaucoup plus grand.

c. Le résultat de l'opération : la puissance

Le résultat final de l'opération a^n est appelé la puissance. Pour 3^4, la puissance est 81. Il est important de ne pas confondre l'expression entière (3^4) avec son résultat final (81). La puissance est la valeur obtenue après avoir effectué toutes les multiplications demandées par l'exposant.

B. Lecture et cas particuliers

La lecture des puissances suit une règle simple, avec deux exceptions notables.

- a^2 se lit "a au carré". Cela vient de la géométrie, car l'aire d'un carré de côté a est $a \times a = a^2$.
- a^3 se lit "a au cube". Cela vient aussi de la géométrie, car le volume d'un cube d'arête a est $a \times a \times a = a^3$.

Certains exposants ont des propriétés fixes.

- **Exposant 1** : Tout nombre à la puissance 1 est égal à lui-même.

$$a^1 = a$$

- **Exposant 0** : Tout nombre non nul à la puissance 0 est égal à 1. C'est une convention mathématique fondamentale.

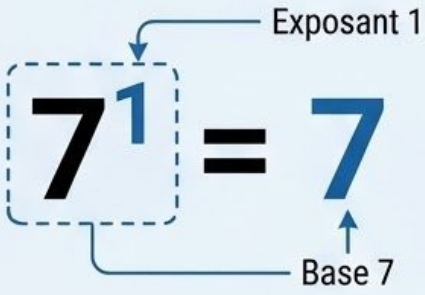
$$a^0 = 1 \left(\text{pour } a \neq 0\right)$$

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

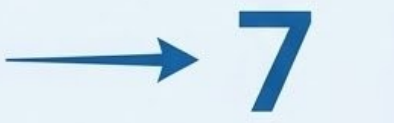
Figure 2 : Réf. IMG (5444-8407-2267)

Tableau récapitulatif des cas particuliers pour les exposants 0 et 1

a. La règle de l'identité : l'exposant 1

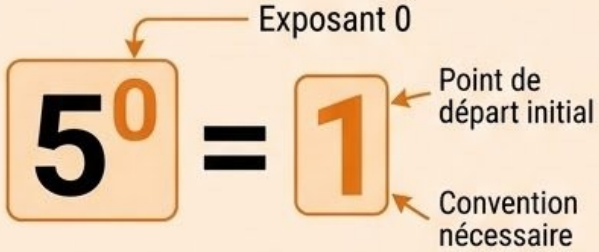


Base utilisée une seule fois — Pas de multiplication — Résultat = Base elle-même

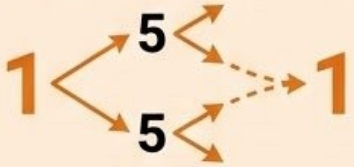


$x^1 = x$ (Puissance "neutre")

b. La règle du commencement : l'exposant 0



Anfant das tune multiplication par 5 sortarce, la résultɯo initialte est 1



$x^0 = 1$ (pour $x \neq 0$)

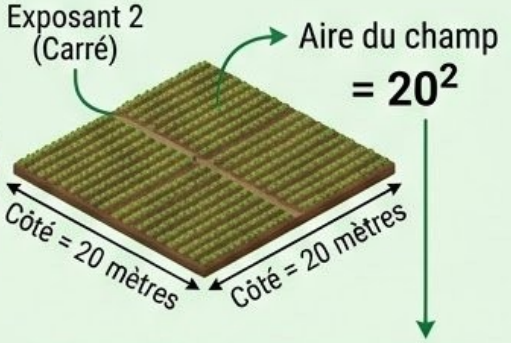
c. Le cas du carré : l'exposant 2



Isiro, champ agricole



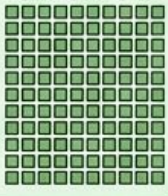
Calculer une surface



Calcul :

$20^2 = 20 \times 20$

$= 400$ mètres carrés



$x^2 = x \times x$ (Carré)

Figure 2 : Réf. IMG (5444-8407-2267)

Tableau récapitulatif des cas particuliers pour les exposants 0 et 1

a. La règle de l'identité : l'exposant 1

L'exposant 1 est le cas le plus simple. L'expression 7^1 signifie que la base 7 est utilisée une seule fois dans la multiplication. Il n'y a donc pas de multiplication à faire. Le résultat est simplement la base elle-même. C'est pourquoi $7^1=7$. Cette règle s'applique à n'importe quel nombre. C'est une sorte de puissance "neutre" qui ne change pas la base.

b. La règle du commencement : l'exposant 0

La règle de l'exposant zéro peut sembler étrange. Pourquoi $5^0=1$? Il s'agit d'une convention nécessaire pour que les autres règles de calcul sur les puissances fonctionnent correctement. On peut la comprendre comme le point de départ avant toute multiplication. Avant de commencer à multiplier par 5, le résultat "initial" est 1.

c. Le cas du carré : l'exposant 2

L'exposant 2, ou "carré", est très courant dans la vie de tous les jours, surtout pour mesurer des surfaces. Calculer l'aire d'un champ carré à cultiver à Isiro, en Province Orientale, revient à calculer le côté "au carré". Si le champ mesure 20 mètres de côté, sa surface est $20^2=400$ mètres carrés.

■ ■ ■

C. Scénarios et Exercices

a. Anecdote : Le marché de Mbanza-Ngungu

Papa Nzolantima est un vendeur respecté au grand marché de Mbanza-Ngungu, dans le Kongo Central. Il est connu pour ses sacs de cossettes de manioc de première qualité. Pour attirer les clients lors de la fête de l'indépendance, il lance une promotion spéciale qui intrigue tout le monde. Le premier client achète 2 sacs. Le deuxième client, attiré par la foule, en achète 4. Le troisième en prend 8. Chaque nouveau client achète le double du précédent.

Très vite, les gens réalisent que Papa Nzolantima n'utilise pas une simple addition, mais une suite de puissances de 2. Le premier client prend 2^1 sacs,

le deuxième 2^2, le troisième 2^3. Au bout du dixième client, il faudrait 2^{10} sacs, soit 1024 sacs ! Cette petite promotion a montré à tout le marché la croissance explosive des puissances.

Exercice 1 : La pêche miraculeuse à Mbandaka

Énoncé : Mama Hélène possède un petit étang piscicole à Mbandaka, dans la province de l'Équateur. Elle commence son élevage avec 10 tilapias. Grâce à une bonne alimentation, la population de poissons double chaque mois. Calcule le nombre de poissons qu'elle aura après 4 mois.

Résolution pas-à-pas :

1. **Étape 1 : Identifier les données de départ** Le nombre initial de poissons est 10. Le facteur de multiplication est 2 (la population double). La durée est de 4 mois.
2. **Étape 2 : Poser l'opération** Chaque mois, le nombre de poissons est multiplié par 2. Sur 4 mois, le nombre initial sera multiplié 4 fois par 2. L'opération est : $10 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$.
3. **Étape 3 : Utiliser la notation en puissance** La multiplication répétée $2 \times 2 \times 2 \times 2$ s'écrit 2^4. Le calcul devient : 10×2^4.
4. **Étape 4 : Calculer la puissance et le résultat final** D'abord, on calcule la puissance : $2^4 = 16$. Ensuite, on multiplie par le nombre initial : $10 \times 16 = 160$. Mama Hélène aura 160 poissons après 4 mois.

Exercice 2 : Le carré de maïs de Papy Kabasele

Énoncé : Papy Kabasele possède un champ parfaitement carré à côté de Mbuji-Mayi. Il veut y planter du maïs. Un côté de son champ mesure 15 mètres. Quelle est la surface totale (l'aire) de son champ en mètres carrés (m^2) ?

Résolution pas-à-pas :

1. **Étape 1 : Identifier la forme géométrique et la question** Le champ est un carré. La question demande de calculer sa surface (son aire).
2. **Étape 2 : Se rappeler la formule de l'aire d'un carré** L'aire d'un carré est égale à son côté multiplié par lui-même. Aire = côté × côté, ce qui s'écrit aussi Aire = côté².

3. **Étape 3 : Appliquer la formule avec les données de l'énoncé** Le côté du champ mesure 15 mètres. Aire = 15^2.
4. **Étape 4 : Calculer la puissance** On effectue le calcul : $15^2 = 15 \times 15 = 225$. La surface du champ de Papy Kabasele est de 225 m^2.

1.2. Les polynômes arithmétiques

a. Une chaîne de calculs

Même si le mot "polynôme" peut sembler intimidant, il décrit une chose très simple. C'est une suite de calculs, comme une longue phrase mathématique qui connecte des nombres avec des signes plus (+), moins (-), fois (×) ou divisé par (÷).

Chaque jour, sans le savoir, des calculs de ce type sont faits. Pour calculer le coût total des courses au marché de Gambela ou pour estimer la quantité de briques nécessaires à un mur à Mbuji-Mayi, on utilise un polynôme arithmétique.

A. Qu'est-ce qu'un polynôme arithmétique ?

Un polynôme arithmétique est une expression mathématique composée de nombres et de signes d'opérations. Il ne contient pas de lettres, seulement des chiffres.

Exemple : 5 + 3 × 2 - (4 ÷ 2) est un polynôme arithmétique. Il est formé de plusieurs "termes" (les nombres) reliés par des opérations. Le calculer, c'est trouver son unique valeur numérique. Pour y arriver, il existe un ordre à respecter. Le chaos n'est pas permis en mathématiques.

B. L'ordre de priorité des opérations

Calculer un polynôme arithmétique exige de suivre un ordre précis. Sans cet ordre, deux personnes pourraient trouver deux résultats différents pour le même calcul. Les règles sont les suivantes, dans l'ordre :

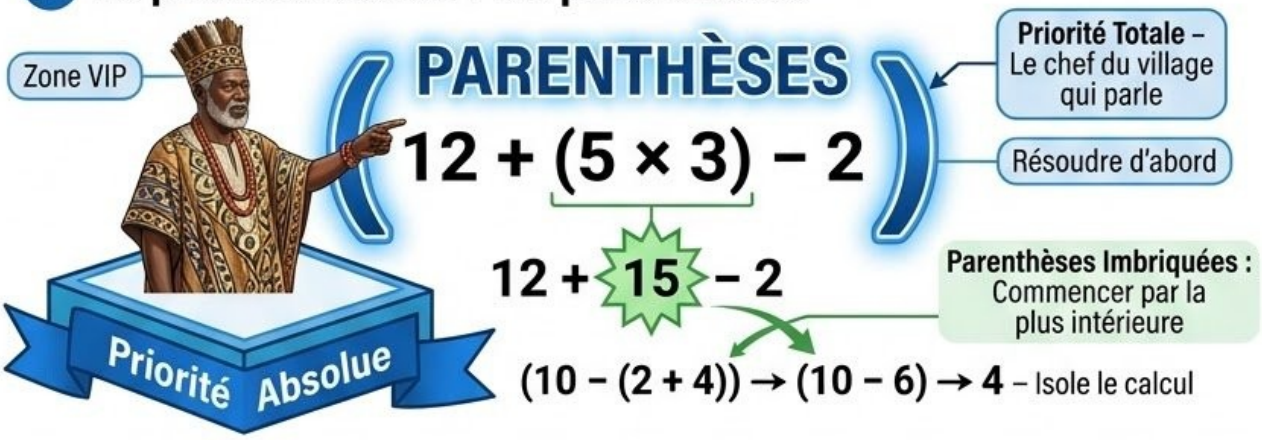
1. **Parenthèses :** Toujours effectuer les calculs situés à l'intérieur des parenthèses en premier.
2. **Multiplications et Divisions :** Ensuite, effectuer toutes les multiplications et les divisions. On avance de la gauche vers la droite.

3. **Additions et Soustractions :** Enfin, effectuer toutes les additions et les soustractions, toujours de la gauche vers la droite.

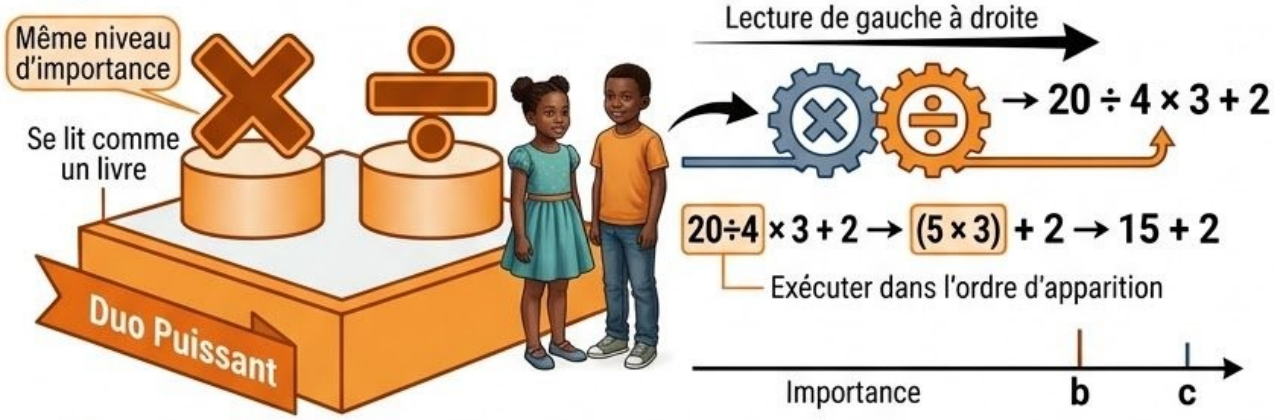
Figure 3 : Réf. IMG (6399-0746-0457)

Hiérarchie des calculs, du plus important au moins important

a. La priorité absolue : les parenthèses



b. Le duo puissant : multiplication et division



c. Les opérations de base : addition et soustraction

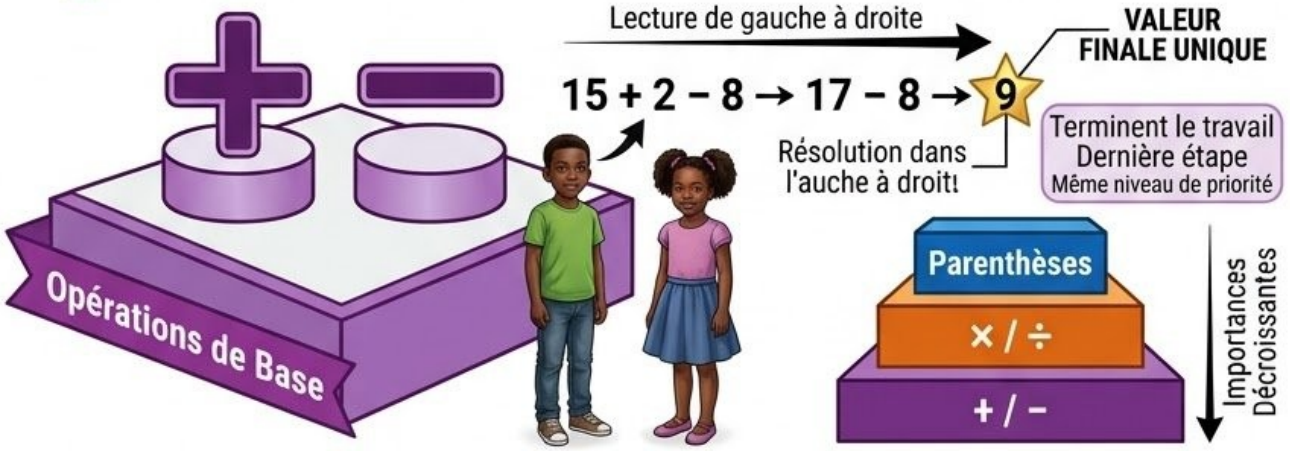


Figure 3 : Réf. IMG (6399-0746-0457)

Hiérarchie des calculs, du plus important au moins important

a. La priorité absolue : les parenthèses

Les parenthèses dans un calcul fonctionnent comme une zone VIP. Les opérations qui s'y trouvent doivent être résolues avant toutes les autres, peu importe leur nature. Si des parenthèses sont imbriquées, on commence par la plus intérieure. Elles isolent une partie du calcul et lui donnent une priorité totale sur le reste de l'expression. C'est le chef du village qui parle en premier.

b. Le duo puissant : multiplication et division

Une fois les parenthèses vidées, le regard se porte sur les multiplications (×) et les divisions (÷). Ces deux opérations ont le même niveau d'importance. Pour les départager, on les exécute dans l'ordre où elles apparaissent, en lisant le calcul de gauche à droite, comme un livre.

c. Les opérations de base : addition et soustraction

Tout à la fin, on s'occupe des additions (+) et des soustractions (-). Comme pour la multiplication et la division, elles partagent le même niveau de priorité. On les résout donc simplement de gauche à droite. Elles terminent le travail et permettent de trouver la valeur finale et unique du polynôme arithmétique.

■ ■ ■

Scénarios et Exercices

Papa Mbuta est un excellent menuisier à Bandundu, dans la province du Kwilu. Il doit fabriquer 5 chaises et 2 tables pour une commande. Pour chaque chaise, il lui faut 3 mètres de bois. Pour chaque table, il en faut 8. Le mètre de bois de wengé coûte 2500 Francs Congolais. Il veut calculer le coût total du bois avant de donner son devis au client.

Il pense dans sa tête : "Cinq chaises fois trois mètres, ça fait une quantité. Deux tables fois huit mètres, une autre quantité. J'additionne ces deux quantités pour avoir le total de mètres. Puis je multiplie le tout par 2500 FC".

Il vient, sans le savoir, de construire un polynôme arithmétique pour gérer son stock et ses finances avec précision.

Exercice 1 : Les courses de Maman Jolie au marché de Matadi

Énoncé : Maman Jolie va au marché central de Matadi (Kongo Central). Elle achète 3 kg de riz à 2000 FC le kilo, 4 savons à 500 FC pièce et 2 pains de "kwanga" à 750 FC l'unité. Elle avait un billet de 10 000 FC et un autre de 5 000 FC. Combien lui reste-t-il après ses achats ?

Résolution pas-à-pas :

1. **Étape 1 : Calculer le coût de chaque article** On calcule le prix pour chaque groupe d'articles en utilisant la multiplication.
   - Riz : $3 \times 2000 = 6000$ FC
   - Savons : $4 \times 500 = 2000$ FC
   - Kwanga : $2 \times 750 = 1500$ FC
2. **Étape 2 : Calculer le total des dépenses** On additionne le coût de tous les articles pour connaître la dépense totale. $6000 + 2000 + 1500 = 9500$ FC
3. **Étape 3 : Calculer l'argent restant** On calcule d'abord l'argent total que Maman Jolie possède, puis on soustrait ses dépenses.
   - Argent total : $10000 + 5000 = 15000$ FC
   - Argent restant : $15000 - 9500 = 5500$ FC Il lui reste 5500 FC.

Exercice 2 : Le score de l'élève à l'école de l'Équateur

Énoncé : Bofia, élève en 7ème année à Mbandaka, a passé un test. Le résultat est calculé avec le polynôme suivant : $100 - (5 \times 4 + 2 \times 8)$. Calcule son score final.

Résolution pas-à-pas :

1. **Étape 1 : Résoudre l'intérieur des parenthèses** La règle dit de commencer par les parenthèses. À l'intérieur, il y a des multiplications et une addition : $(5 \times 4 + 2 \times 8)$. On doit d'abord faire les multiplications.
   - $5 \times 4 = 20$
   - $2 \times 8 = 16$ Le calcul dans la parenthèse devient : $(20 + 16)$.

2. **Étape 2 : Finir le calcul des parenthèses** Maintenant, on effectue l'addition restante dans la parenthèse. 20 + 16 = 36 Le polynôme de départ 100 - (5 × 4 + 2 × 8) se simplifie en 100 - 36.

3. **Étape 3 : Effectuer la soustraction finale** Il ne reste plus qu'une seule opération. 100 - 36 = 64 Le score final de Bofia est de 64.

1.3. Numération en base quelconque et conversion

a. L'idée derrière les bases

Lorsque nous comptons sur nos dix doigts, nous utilisons la base 10 sans même y penser. Chaque doigt représente une unité. C'est le système le plus courant dans le monde, de Kananga à Bukavu.

Pourtant, d'autres manières de compter existent. Les ordinateurs, par exemple, comptent avec seulement deux "doigts" : le 0 et le 1. Comprendre ces autres "bases" revient à apprendre à parler un nouveau langage des nombres, une compétence utile pour la logique et l'informatique.

A. Définition d'une base de numération

Une base de numération est le nombre de chiffres ou symboles différents utilisés pour représenter tous les nombres.

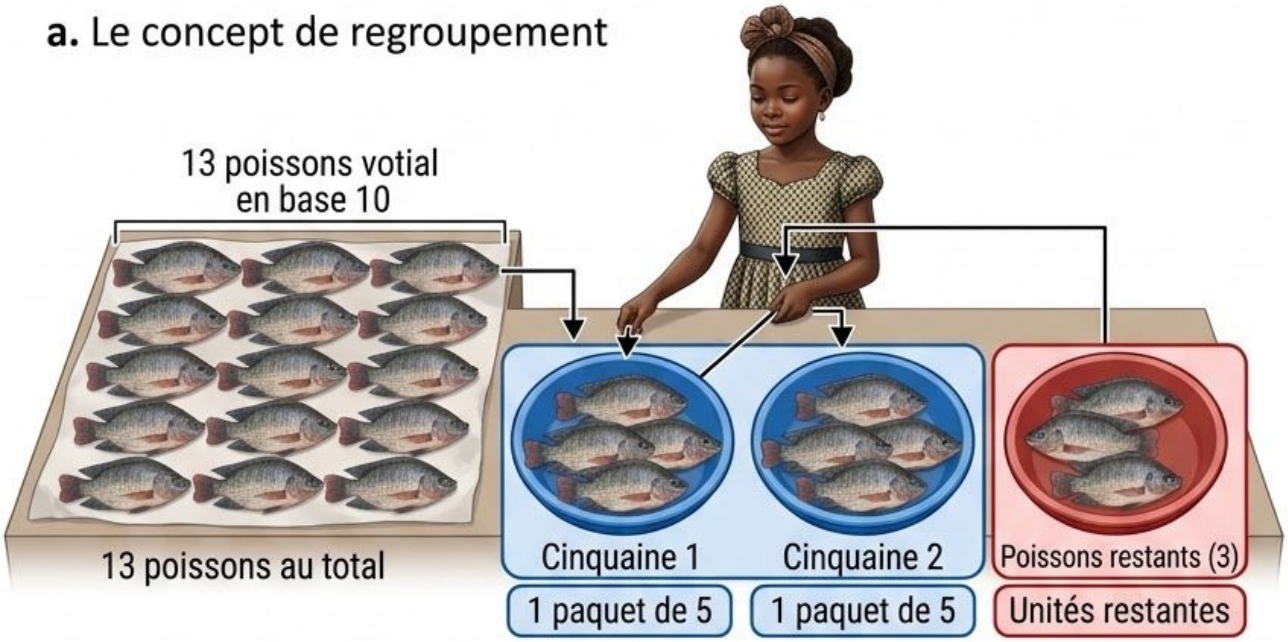
La base 10, appelée système décimal, utilise dix chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Une base 5, appelée système quinaire, utilise seulement cinq chiffres : 0, 1, 2, 3, 4. Dans cette base, le chiffre 5 n'existe pas.

Pour éviter la confusion, un nombre écrit dans une base b différente de 10 est noté avec cette base en indice. Le nombre "cent un" en base 2 s'écrit $(101)_2$. Sans indice, un nombre est supposé être en base 10.

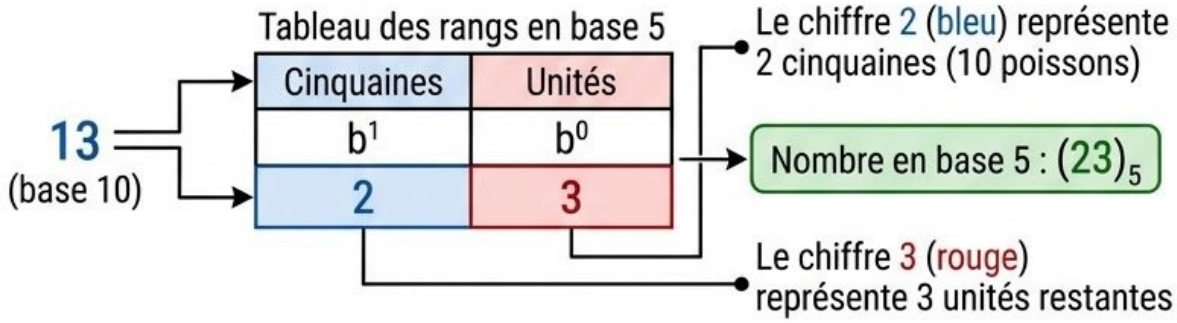
Figure 4 : Réf. IMG (1300-3398-1469)

Schéma montrant le regroupement de 13 objets en base 5

a. Le concept de regroupement



b. La lecture du nombre



c. La généralisation

