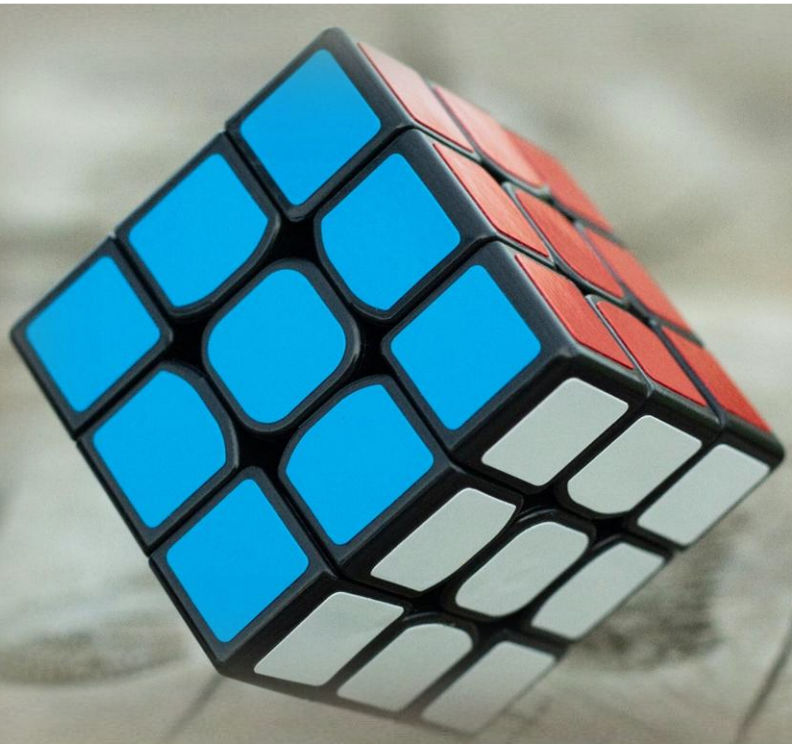
Géometrie & trigonométrie



CONFORME AU PROGRAMME NATIONAL

2è Année

EDITION 2025

Options humanités

SCIENTIFIQUES



TABLE DE MATIERE

Préliminaires 1
0.1. Note introductive à l'usage de l'enseignant 1
0.2. Profil d'entrée et prérequis 2
0.3. Compétences visées et profil de sortie 3
0.4. Méthodologie et matériel didactique 5
Chapitre 1 : Vecteurs du Plan et Bases 9
1.1. Vecteurs colinéaires et vecteurs libres 9
1.2. Bases et repères du plan 11
1.3. Expression analytique et opérations 13
1.4. Changement de base et de repère 16
1.5. Ressources complémentaires 17
- 1.5.1. Q&A 17
- 1.5.2. Erreurs fréquentes 19
- 1.5.3. Scénarios et Exercices 20
Chapitre 2 : Le Produit Scalaire et ses Applications 25
2.1. Définition et interprétation géométrique 25
2.2. Expression analytique dans une base orthonormée 28
2.3. Propriétés et règles de calcul 31
2.4. Applications à l'orthogonalité et lieux géométriques 34
2.5. Ressources complémentaires 35
- 2.5.1. Q&A 35
- 2.5.2. Erreurs fréquentes 37
- 2.5.3. Scénarios et Exercices 38
Chapitre 3 : Étude Analytique de la Droite 43
3.1. Vecteurs directeurs et vecteurs normaux 43
3.2. Équations paramétriques et cartésiennes 46
3.3. Positions relatives de deux droites 49
3.4. Distances et conditions d'orthogonalité 52
3.5. Ressources complémentaires 54
- 3.5.1. Q&A 54
- 3.5.2. Erreurs fréquentes 55
- 3.5.3. Scénarios et Exercices 56

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

Chapitre 4 : Configuration de l'Espace : Droites et Plans 64
4.1. Détermination et représentation des plans 64
4.2. Positions relatives de deux droites dans l'espace 67
4.3. Positions relatives droite-plan et plan-plan 70
4.4. Orthogonalité dans l'espace 73
4.5. Ressources complémentaires 74
- 4.5.1. Q&A 74
- 4.5.2. Erreurs fréquentes 76
- 4.5.3. Scénarios et Exercices 77

Chapitre 5 : Introduction à la Géométrie Descriptive : Le Point 84
5.1. Dièdres et plans de projection 84
5.2. Projections orthogonales et épure du point 87
5.3. Cote et éloignement : Coordonnées descriptives 89
5.4. Positions particulières et plans bissecteurs 91
5.5. Ressources complémentaires 92
- 5.5.1. Q&A 92
- 5.5.2. Erreurs fréquentes 93
- 5.5.3. Scénarios et Exercices 94

Chapitre 6 : Représentation de la Droite et du Plan 101
6.1. Épure de la droite et traces 101
6.2. Droites particulières 103
6.3. Représentation du plan par ses traces 105
6.4. Plans particuliers et appartenance 107
6.5. Ressources complémentaires 108
- 6.5.1. Q&A 108
- 6.5.2. Erreurs fréquentes 109
- 6.5.3. Scénarios et Exercices 110

Chapitre 7 : Cercle Trigonométrique et Formules Fondamentales 119
7.1. Le cercle trigonométrique et le radian 119
7.2. Définition des nombres trigonométriques 122
7.3. La relation fondamentale et ses dérivées 125
7.4. Valeurs des angles remarquables 128
7.5. Ressources complémentaires 130

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

- 7.5.1. Q&A 130
- 7.5.2. Erreurs fréquentes 131
- 7.5.3. Scénarios et Exercices 132

Chapitre 8 : Relations entre Angles Associés et Réduction 138

8.1. Angles opposés et angles supplémentaires 138

8.2. Angles complémentaires et anti-supplémentaires 141

8.3. Périodicité et réduction au premier quadrant 144

8.4. Identités trigonométriques usuelles 147

8.5. Ressources complémentaires 149

- 8.5.1. Q&A 149
- 8.5.2. Erreurs fréquentes 150
- 8.5.3. Scénarios et Exercices 151

Chapitre 9 : Équations Trigonométriques et Résolution de Triangles 158

9.1. Équations trigonométriques élémentaires 158

9.2. Équations réductibles aux formes simples 161

9.3. Résolution du triangle rectangle 164

9.4. Applications : Topographie et géométrie pratique 166

9.5. Ressources complémentaires 167

- 9.5.1. Q&A 167
- 9.5.2. Erreurs fréquentes 168
- 9.5.3. Scénarios et Exercices 169

ANNEXES ..... a

ANNEXES ..... a

A.1. Formulaire de Trigonométrie i

- A.1.1. Conversion d'unités angulaires i
- A.1.2. Valeurs remarquables des fonctions trigonométriques i
- A.1.3. Relations fondamentales iii
- A.1.4. Formules de réduction pour angles associés iii
- A.1.5. Périodicité des fonctions trigonométriques iv
- A.1.6. Relations métriques dans le triangle rectangle v
- A.1.7. Théorème d'Al-Kashi pour triangles quelconques v
- A.1.8. Signes des fonctions trigonométriques selon les quadrants v

A.2. Guide d'utilisation des instruments de mesure angulaire vi

- A.2.1. Le rapporteur géométrique vi
- A.2.2. La boussole pour mesures d'azimut vii
- A.2.3. Fabrication d'un clinomètre artisanal viii
- A.2.4. Exercice pratique de mesure dans la cour de l'école viii

A.3. Recueil de problèmes de géométrie descriptive ix

- A.3.1. Série 1 : Représentation de points isolés ix
- A.3.2. Série 2 : Droites et leurs traces x
- A.3.3. Série 3 : Représentation de plans par leurs traces xi
- A.3.4. Conseils pour l'auto-correction xi

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590



Préliminaires

0.1. Note introductive à l'usage de l'enseignant

Ce manuel de Géométrie et Trigonométrie, conçu spécifiquement pour la première année des Humanités Scientifiques de la République Démocratique du Congo, constitue une opérationnalisation rigoureuse du Programme National de l'Enseignement Secondaire dans le Domaine d'Apprentissage des Sciences Mathématiques. Il s'aligne scrupuleusement sur les objectifs pédagogiques officiels couvrant la géométrie descriptive et la trigonométrie élémentaire. L'enseignant trouvera ici une progression didactique qui privilégie la construction logique des savoirs et leur mobilisation dans des situations complexes ancrées dans le contexte congolais.

L'approche par compétences exige de placer l'élève au centre du processus d'apprentissage. Cette philosophie pédagogique transforme l'enseignant en facilitateur qui guide l'élève dans sa découverte active des concepts mathématiques. Chaque chapitre propose des tâches qui sollicitent le raisonnement spatial et la capacité d'abstraction de l'apprenant. Les situations-problèmes contextualisées créent un pont entre les abstractions géométriques et les réalités tangibles de la vie quotidienne congolaise.

La structure du manuel obéit à une logique de complexification progressive. Les premiers chapitres établissent les fondements de la géométrie descriptive en introduisant le système de projection orthogonale et la représentation du point. Cette base solide permet ensuite d'aborder la représentation de droites et de plans dans l'espace. La seconde partie du manuel développe systématiquement la trigonométrie en partant du cercle trigonométrique pour aboutir à la résolution d'équations et de triangles quelconques.

L'enseignant constatera que chaque chapitre respecte une architecture pédagogique cohérente. Le développement théorique expose les concepts avec rigueur scientifique tout en privilégiant la clarté du discours. Les démonstrations mathématiques s'appuient sur des raisonnements déductifs explicites évitant les sauts logiques qui désarçonnent l'élève débutant. Les définitions utilisent un vocabulaire précis mais accessible, évitant le jargon universitaire superflu.

Les ressources complémentaires en fin de chapitre constituent un dispositif pédagogique essentiel. La section Questions et Réponses anticipe les

interrogations fréquentes des élèves et fournit des éclaircissements conceptuels approfondis. La section Erreurs fréquentes alerte l'enseignant sur les obstacles épistémologiques prévisibles et propose des stratégies de remédiation. La section Scénarios et Exercices fournit un matériel d'entraînement diversifié permettant la différenciation pédagogique selon les niveaux des élèves.

L'enseignant adaptera le rythme de progression aux capacités réelles de sa classe. Les élèves des zones urbaines bénéficiant de formations préalables solides progresseront plus rapidement que ceux des zones rurales nécessitant des consolidations préalables. La souplesse pédagogique demeure indispensable pour répondre aux besoins spécifiques de chaque cohorte d'apprenants.

0.2. Profil d'entrée et prérequis

L'accès fructueux à ce cours de Géométrie et Trigonométrie requiert la maîtrise préalable de compétences mathématiques fondamentales développées durant les cycles primaire et post-primaire inférieur. L'élève entrant en première année des Humanités Scientifiques doit posséder un bagage géométrique et algébrique minimal garantissant sa capacité à suivre les développements théoriques du cours.

En géométrie plane, l'élève doit connaître solidement les propriétés des figures usuelles. Les triangles et leurs différentes catégories selon les angles et les côtés constituent des objets familiers. L'élève identifie les triangles rectangles, isocèles, équilatéraux et quelconques. Il reconnaît leurs propriétés caractéristiques et sait les exploiter dans des calculs simples. Les quadrilatères particuliers comme les carrés, rectangles, losanges, parallélogrammes et trapèzes font partie de son répertoire géométrique actif.

Les théorèmes fondamentaux de la géométrie plane doivent être maîtrisés au niveau de l'application pratique. Le théorème de Pythagore permettant de calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle connaissant les deux autres constitue un outil indispensable mobilisé quotidiennement dans ce cours. Le théorème de Thalès établissant les rapports de proportionnalité dans les configurations de droites parallèles coupées par des sécantes sert régulièrement dans les démonstrations vectorielles et les calculs métriques.

En algèbre, l'élève doit manipuler aisément les nombres réels dans leurs différentes représentations. Les opérations arithmétiques élémentaires sur les entiers, les fractions et les nombres décimaux s'effectuent avec fluidité. Les

nombres irrationnels comme les racines carrées apparaissent fréquemment dans les calculs trigonométriques et ne doivent pas constituer des obstacles. La simplification d'expressions contenant des radicaux s'avère nécessaire pour exprimer les résultats sous forme exacte.

Le calcul algébrique élémentaire comprend les techniques de développement et de factorisation d'expressions littérales. Le développement de produits remarquables comme $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ et $(a+b)(a-b)$ doit être automatisé. La factorisation par mise en évidence de facteurs communs et par reconnaissance de structures remarquables facilite la simplification d'expressions trigonométriques complexes rencontrées dans les démonstrations d'identités.

La résolution d'équations du premier degré à une inconnue constitue une compétence transversale mobilisée dans les problèmes d'application. L'élève doit savoir isoler l'inconnue en effectuant les transformations algébriques appropriées. Les systèmes d'équations linéaires à deux inconnues résolus par substitution ou par combinaison linéaire apparaissent dans certains problèmes géométriques avancés.

La notion de vecteur introduite en fin de cycle inférieur fournit un point d'ancrage pour les développements géométriques ultérieurs. L'élève doit connaître la représentation graphique d'un vecteur par une flèche orientée. Les opérations vectorielles élémentaires comme l'addition géométrique et la multiplication par un scalaire constituent des outils exploités dans les démonstrations de colinéarité et de parallélisme.

L'aptitude à la visualisation spatiale représente un prérequis moins formalisé mais tout aussi crucial. L'élève doit pouvoir imaginer mentalement des objets tridimensionnels à partir de leurs représentations planes. Cette capacité se développe progressivement par l'exposition répétée aux dessins en perspective et aux schémas géométriques. Les activités de manipulation d'objets concrets dans l'espace préparent efficacement l'abstraction géométrique nécessaire en géométrie descriptive.

0.3. Compétences visées et profil de sortie

Au terme de cette année de formation en Géométrie et Trigonométrie, l'apprenant aura développé un ensemble structuré de compétences mathématiques le rendant capable de résoudre des problèmes géométriques complexes et de modéliser mathématiquement des situations issues de son environnement.

En géométrie descriptive, l'élève maîtrise la représentation des objets tridimensionnels sur le plan selon la méthode de Monge. Il construit correctement les épures de points, droites et plans en respectant les conventions de projection orthogonale. Il lit avec aisance les épures produites par d'autres, reconstituant mentalement la configuration spatiale représentée. Il détermine les intersections entre droites et plans et vérifie les conditions d'appartenance en exploitant les propriétés graphiques des traces. Cette compétence le prépare efficacement aux études techniques supérieures en architecture, ingénierie civile et mécanique.

En trigonométrie, l'élève manipule avec aisance les fonctions circulaires sinus, cosinus et tangente. Il convertit sans erreur les mesures angulaires entre degrés et radians. Il connaît par cœur les valeurs exactes des fonctions trigonométriques pour les angles remarquables et les restitue rapidement lors des calculs. Il applique les formules de réduction pour ramener tout angle à un angle aigu du premier quadrant. Il démontre des identités trigonométriques en mobilisant la relation fondamentale et les propriétés des angles associés.

L'élève résout méthodiquement les équations trigonométriques élémentaires et celles réductibles aux formes simples par transformations algébriques. Il distingue les solutions principales des solutions générales et exprime correctement les ensembles de solutions tenant compte de la périodicité. Il applique les fonctions trigonométriques inverses pour déterminer des angles à partir de leurs valeurs trigonométriques.

En résolution de triangles, l'élève détermine complètement la géométrie d'un triangle rectangle connaissant deux éléments pertinents. Il applique le théorème d'Al-Kashi pour résoudre des triangles quelconques. Il utilise les techniques de triangulation pour calculer des distances inaccessibles et des hauteurs d'objets éloignés. Ces compétences trouvent des applications directes dans les travaux topographiques, les levés cadastraux et les mesures géodésiques.

Le profil de sortie correspond à un élève capable de modéliser mathématiquement son environnement physique. Il reconnaît les configurations géométriques dans les structures architecturales, les réseaux routiers et les installations industrielles. Il transpose les problèmes concrets en schémas géométriques abstraits, effectue les calculs mathématiques appropriés et interprète les résultats numériques dans le contexte initial. Cette compétence de modélisation constitue l'objectif ultime de l'enseignement scientifique.

L'élève développe également des compétences transversales essentielles. La rigueur du raisonnement déductif acquise dans les démonstrations géométriques se transfère vers d'autres disciplines scientifiques. La persévérance nécessaire pour résoudre des problèmes complexes renforce la résilience intellectuelle. La capacité à communiquer des raisonnements mathématiques par écrit et oralement prépare aux interactions professionnelles futures.

0.4. Méthodologie et matériel didactique

La méthodologie pédagogique préconisée dans ce manuel repose sur trois piliers complémentaires : l'exploration intuitive, la formalisation rigoureuse et l'application contextuelle. Cette approche ternaire garantit un apprentissage significatif ancré dans l'expérience de l'élève tout en maintenant l'exigence scientifique indispensable aux études mathématiques.

L'exploration intuitive ouvre chaque séquence d'apprentissage par une situation concrète sollicitant l'intuition géométrique ou trigonométrique de l'élève. Ces situations-problèmes s'ancrent systématiquement dans les réalités de la République Démocratique du Congo. Un pont à construire sur la rivière Lualaba, une mine à cartographier au Katanga, un réseau électrique à dimensionner depuis Inga servent de points d'entrée motivants. L'élève ressent ainsi le besoin de l'outil mathématique avant même que celui-ci ne soit formellement introduit.

La formalisation rigoureuse intervient après cette phase d'exploration. L'enseignant guide l'élève dans la construction progressive des concepts mathématiques abstraits. Les définitions s'énoncent avec précision. Les théorèmes se démontrent par des raisonnements déductifs explicites. Les propriétés se justifient par des arguments géométriques ou algébriques vérifiables. Cette rigueur intellectuelle structure la pensée mathématique de l'élève et le prépare aux exigences des études supérieures scientifiques.

L'application contextuelle conclut chaque séquence en proposant des exercices et des scénarios mobilisant les concepts fraîchement acquis. Les problèmes contextualisés reprennent des situations authentiques du territoire congolais. Les exercices techniques consolident les automatismes calculatoires nécessaires à la fluidité mathématique. Cette alternance entre contextualisation et décontextualisation développe simultanément la compétence de modélisation et la maîtrise technique.

Le matériel didactique indispensable comprend les instruments de dessin géométrique classiques. La règle graduée permet de tracer des segments de longueurs précises et de mesurer des distances sur les épures. L'équerre garantit la perpendicularité rigoureuse des lignes de rappel en géométrie descriptive. Le compas trace les cercles trigonométriques et reporte des longueurs égales. Le rapporteur mesure et construit les angles avec exactitude. Ces instruments physiques développent la dextérité manuelle et la conscience de la précision géométrique.

L'intégration des technologies de l'information et de la communication enrichit considérablement l'apprentissage lorsque les infrastructures le permettent. Les logiciels de géométrie dynamique comme GeoGebra visualisent les transformations géométriques et les variations des fonctions trigonométriques. L'élève manipule interactivement les paramètres et observe instantanément les conséquences graphiques. Cette exploration numérique renforce l'intuition géométrique et facilite la découverte de propriétés mathématiques.

Éditions Donel C.
Direction Éditoriale et Conception Générale :
MURHULA BAZIKANGE M.
Pour contacts, mon site web :
https://murhulabazikange.com/

© 2025, Donel Consulting, Kin. RDC
Tous droits réservés.

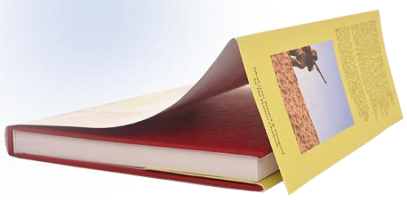
Pour l'excellence de l'éducation en RDC,
Tous les manuels scolaires en un seul endroit,
sur ce site web :
https://manuels-scolaires-rdc.com/

Pour plus de détails, scannez ceci :

PARTIE I

GÉOMÉTRIE VECTORIELLE ET ANALYTIQUE DU PLAN

Cette première partie consolide et approfondit les acquis sur les vecteurs pour en faire des outils puissants d'analyse géométrique. Elle établit le pont entre la géométrie pure et l'algèbre via la méthode des coordonnées. L'élève apprendra à caractériser les objets géométriques par des équations et à résoudre des problèmes de parallélisme et d'orthogonalité par le calcul. Cette approche analytique est fondamentale pour les applications en physique et en ingénierie.



Chapitre 1 : Vecteurs du Plan et Bases

Ce chapitre formalise la notion de vecteur et introduit les structures algébriques nécessaires au repérage dans le plan. Il dépasse la simple vision géométrique « flèche » pour installer le concept de vecteur comme objet mathématique défini par ses composantes dans une base.

1.1. Vecteurs colinéaires et vecteurs libres

Un vecteur libre représente une classe d'équivalence regroupant tous les bipoints qui partagent la même direction, le même sens et la même longueur. Deux bipoints (A, B) et (C, D) définissent le même vecteur libre si et seulement si le quadrilatère $ABDC$ forme un parallélogramme. Cette définition libère le vecteur de toute position particulière dans le plan, permettant de le déplacer sans altérer sa nature mathématique.

La colinéarité de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ signifie qu'ils portent la même direction. Mathématiquement, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$. Cette relation traduit le fait que les deux vecteurs se trouvent sur des droites parallèles ou confondues. Lorsque $k > 0$, les vecteurs ont le même sens ; lorsque $k < 0$, ils ont des sens opposés.

La colinéarité constitue un outil puissant pour démontrer l'alignement de trois points. Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Cette propriété découle du fait que les trois points appartiennent à la même droite, donc les segments qui les relient partagent nécessairement la même direction. Dans un contexte pratique, supposons que trois villages congolais A, B et C se situent respectivement aux coordonnées que l'arpenteur a relevées. Vérifier leur alignement permet de déterminer si une route rectiligne unique peut les desservir ou si un tracé en ligne brisée devient indispensable.

Le parallélisme de deux droites découle également de la colinéarité. Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. Cette condition géométrique se traduit algébriquement par la proportionnalité des composantes des vecteurs directeurs dans un repère donné.

La notion de vecteur libre permet d'associer à tout bipoint (A, B) un objet unique noté $\overrightarrow{AB}$, indépendant du choix de l'origine du repère. Cette abstraction facilite la manipulation algébrique des déplacements et des translations, opérations fondamentales dans l'étude du mouvement et des transformations géométriques.

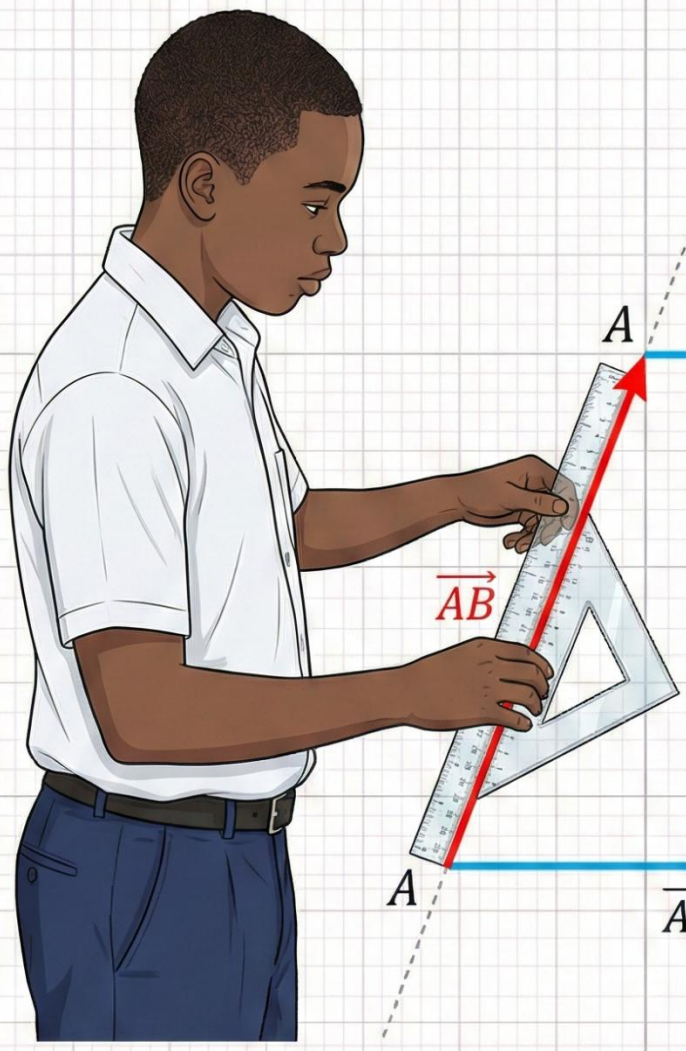
CHAPITRE 1 : VECTEURS DU PLAN ET BASES

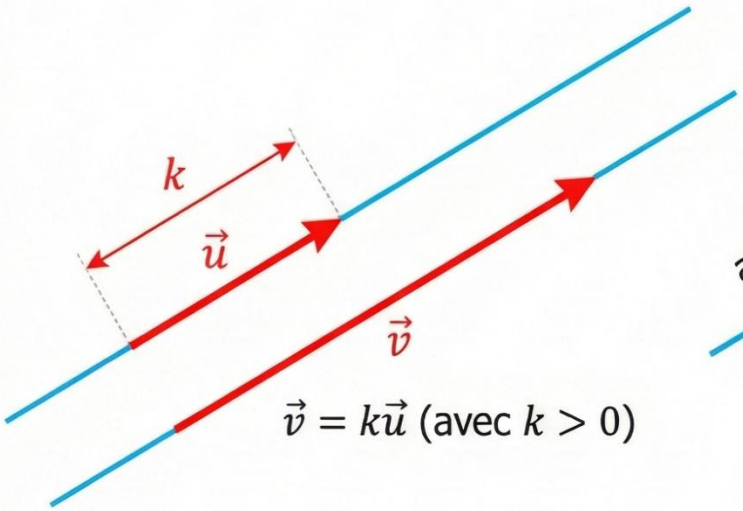
1.1. Vecteurs colinéaires et vecteurs libres

Condition de Colinéarité :

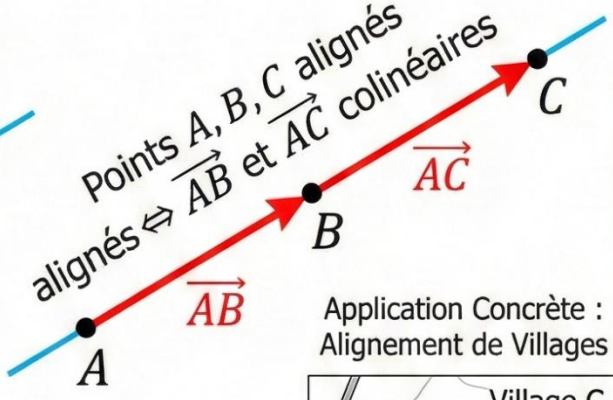
$\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow xy' - yx' = 0$

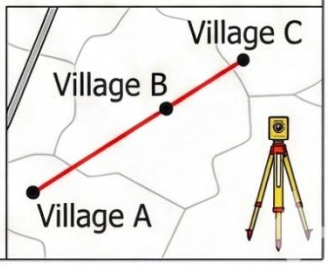




$\vec{v} = k\vec{u}$ (avec $k > 0$)



Application Concrète : Alignement de Villages



Vector Wireframe & Absolute Precision

1.2. Bases et repères du plan

Une base du plan vectoriel consiste en un couple ordonné $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de deux vecteurs non colinéaires. Cette condition de non-colinéarité garantit que tout vecteur $\vec{u}$ du plan s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$, où x et y sont des nombres réels appelés composantes de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Cette décomposition transforme les problèmes géométriques en calculs numériques manipulables.

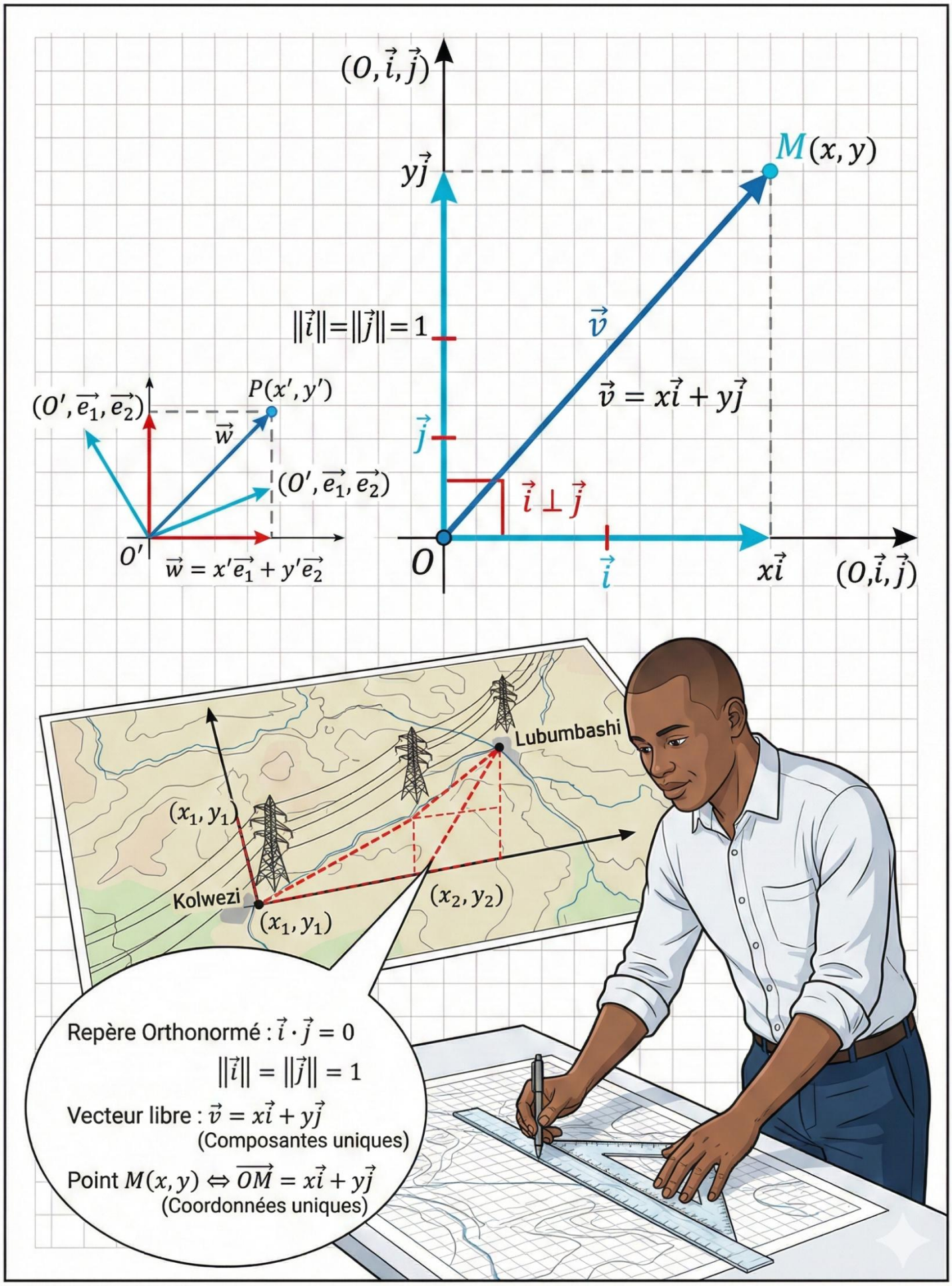
Un repère du plan se définit par la donnée d'un point origine O et d'une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On note ce repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Tout point M du plan possède des coordonnées uniques (x, y) telles que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. Le point M se note alors $M(x, y)$ dans ce repère. Le choix de l'origine et de la base conditionne entièrement le système de coordonnées utilisé pour décrire les positions et les déplacements.

Un repère orthogonal impose que les vecteurs de base $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ soient perpendiculaires, c'est-à-dire que leur produit scalaire soit nul. Cette configuration simplifie considérablement les calculs de distances et d'angles. Un repère orthonormé ajoute la condition supplémentaire que les vecteurs de base aient une norme égale à l'unité : $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$. Ce type de repère constitue le cadre standard pour les mesures en géométrie euclidienne plane.

Le choix d'un repère adapté au problème étudié constitue une compétence stratégique essentielle. Lorsqu'un ingénieur congolais planifie l'implantation de pylônes électriques entre Lubumbashi et Kolwezi, il sélectionne un repère dont l'origine se situe à un point de référence fixe et dont les axes s'alignent avec les directions cardinales du terrain. Cette décision méthodologique réduit la complexité des calculs de positionnement et facilite l'interprétation des données topographiques.

La distinction entre coordonnées d'un point et composantes d'un vecteur mérite une attention particulière. Un point possède des coordonnées qui dépendent de l'origine choisie, tandis qu'un vecteur libre possède des composantes indépendantes de l'origine mais dépendantes de la base. Cette différence conceptuelle évite les confusions fréquentes lors de la résolution de problèmes combinant positions et déplacements.

Bases et Repères du Plan Vectoriel



1.3. Expression analytique et opérations

Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ reliant les points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ s'expriment directement par les formules :

- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{\imath} + (y_B - y_A)\vec{\jmath}$
- Les composantes sont $(x_B - x_A, y_B - y_A)$

Cette relation traduit algébriquement le fait que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ représente le déplacement nécessaire pour passer du point A au point B. Elle constitue l'outil fondamental pour calculer des vecteurs à partir de coordonnées de points.

Le milieu I d'un segment $[AB]$ possède des coordonnées qui se calculent par les moyennes arithmétiques :

- $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$
- $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$

Cette formule découle de la relation vectorielle $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, qui exprime que le point I se situe exactement à mi-chemin entre A et B.

Le centre de gravité G d'un triangle ABC se détermine par les formules :

- $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$
- $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$

Ce point remarquable vérifie la relation vectorielle $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, propriété qui le caractérise comme barycentre des trois sommets affectés de coefficients égaux.

L'addition vectorielle se traduit en coordonnées par l'addition composante par composante. Si $\vec{u}(x_u, y_u)$ et $\vec{v}(x_v, y_v)$, alors :

- $\vec{u} + \vec{v}$ a pour composantes $(x_u + x_v, y_u + y_v)$

La multiplication d'un vecteur par un scalaire k multiplie chaque composante par ce nombre :

- Si $\vec{u}(x_u, y_u)$, alors $k\vec{u}$ a pour composantes (kx_u, ky_u)

Ces règles opératoires transforment les manipulations géométriques abstraites en calculs numériques concrets. Considérons une pirogue qui remonte le fleuve Congo depuis Kinshasa. Si le vecteur déplacement du premier jour vaut $\vec{u}(15{,}8)$ kilomètres dans un repère où l'axe des abscisses pointe vers l'est et l'axe des ordonnées vers le nord, et le déplacement du deuxième jour vaut $\vec{v}(12,-3)$ kilomètres, le déplacement total après deux jours se calcule par :

- $\vec{u}+\vec{v}=\big(15+12{,}8+(-3)\big)=(27{,}5)$

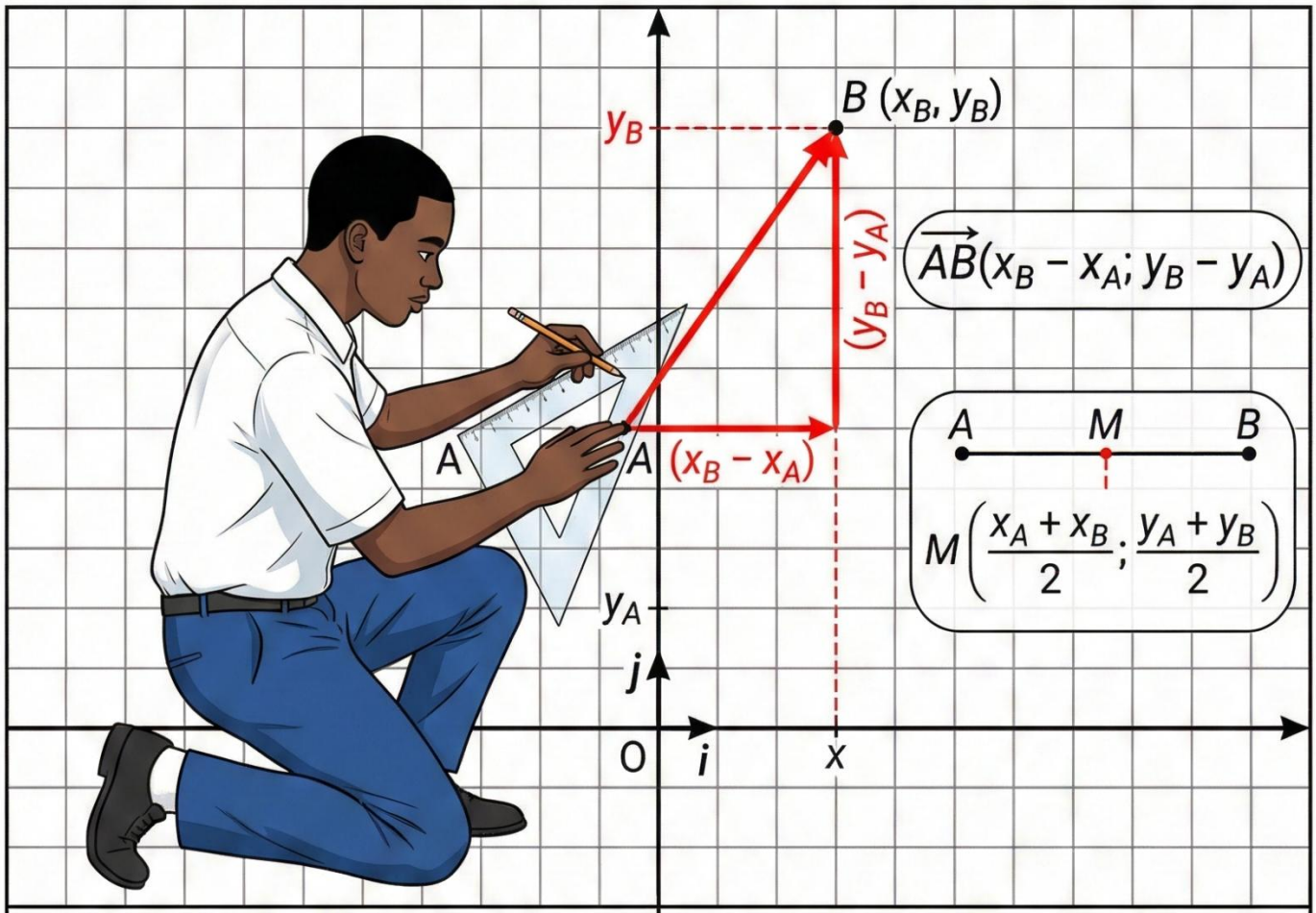
La pirogue a donc progressé de 27 kilomètres vers l'est et de 5 kilomètres vers le nord par rapport à Kinshasa.

La norme d'un vecteur $\vec{u}(x,y)$ dans un repère orthonormé se calcule par la formule de Pythagore :

- $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$

Cette mesure représente la longueur géométrique du vecteur, indépendante de son orientation. Pour la pirogue précédente, la distance totale parcourue en ligne droite depuis Kinshasa vaut $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{27^2+5^2}=\sqrt{729+25}=\sqrt{754}\approx 27{,}46$ kilomètres.

1.3. EXPRESSION ANALYTIQUE ET OPÉRATIONS

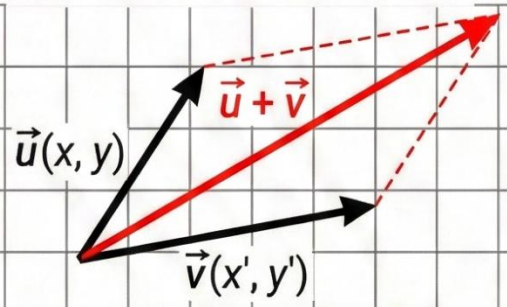


$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$$

A M B

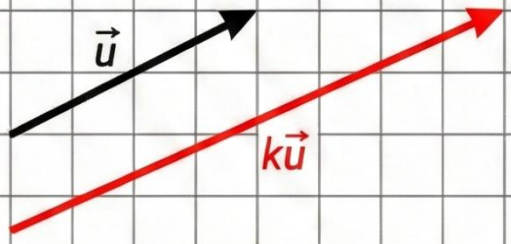
$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Addition Vectorielle $\vec{u} + \vec{v}$



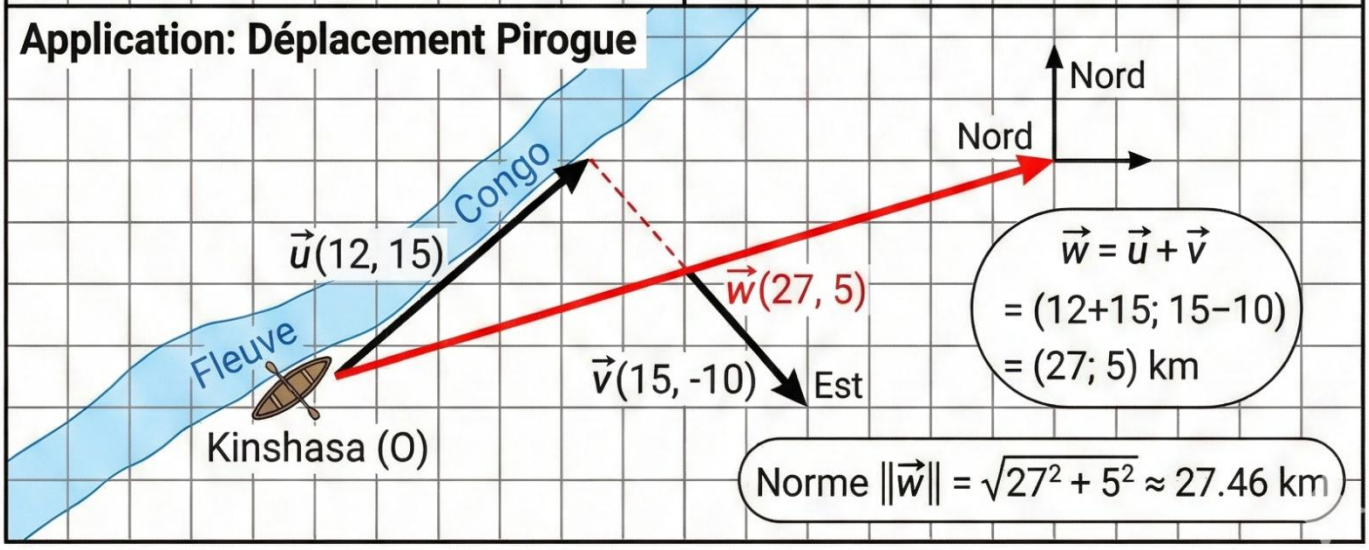
$$\vec{u} + \vec{v}(x + x'; y + y')$$

Multiplication par un Scalaire $k\vec{u}$



$$k\vec{u}(kx; ky)$$

Application: Déplacement Pirogue



$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$
$$= (12+15; 15-10)$$
$$= (27; 5) \text{ km}$$

Norme $\|\vec{w}\| = \sqrt{27^2 + 5^2} \approx 27.46$ km

1.4. Changement de base et de repère

Lorsqu'on passe d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ à un nouveau repère $\left(O';\vec{\imath'},\vec{\jmath'}\right)$, les coordonnées d'un même point M se transforment selon des formules précises. Cette transformation nécessite deux informations essentielles : les coordonnées de la nouvelle origine O' dans l'ancien repère et l'expression des nouveaux vecteurs de base dans l'ancienne base.

Supposons que dans le repère initial, le point O' possède les coordonnées (a,b) et que les vecteurs de la nouvelle base s'expriment par :

- $\vec{\imath'} = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath}$
- $\vec{\jmath'} = \gamma\vec{\imath} + \delta\vec{\jmath}$

Si un point M possède les coordonnées (x,y) dans le premier repère et (x',y') dans le second, alors la relation vectorielle $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ se traduit par :

$$x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = (a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}) + x'(\alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath}) + y'(\gamma\vec{\imath} + \delta\vec{\jmath})$$

En identifiant les composantes selon $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$, on obtient le système :

- $x = a + \alpha x' + \gamma y'$
- $y = b + \beta x' + \delta y'$

Ces formules permettent de passer des nouvelles coordonnées aux anciennes. Pour obtenir la transformation inverse, il faut résoudre ce système par rapport à x' et y', opération qui nécessite que le déterminant $\alpha\delta - \beta\gamma$ soit non nul, condition garantie par la non-colinéarité des vecteurs de la nouvelle base.

Le changement de base pure, sans modification d'origine, simplifie les formules. Si $O' = O$, alors $a = b = 0$ et les relations deviennent :

- $x = \alpha x' + \gamma y'$
- $y = \beta x' + \delta y'$

Dans le cas particulier d'une rotation d'angle θ autour de l'origine, les formules de changement de base s'écrivent :

- $x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$
- $y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$

Cette transformation préserve les distances et les angles, propriété essentielle pour les applications en physique et en ingénierie.

Considérons une application concrète à Goma. Un géomètre établit un premier repère en prenant pour origine le centre-ville et pour axes les directions est-ouest et nord-sud. Un second géomètre travaillant sur un quartier périphérique préfère utiliser un repère local centré sur la place principale du quartier, situé à 2 kilomètres à l'est et 3 kilomètres au nord du centre-ville, avec des axes tournés de $30°$ dans le sens trigonométrique par rapport aux directions cardinales. Les coordonnées d'un édifice dans le repère global se transforment en coordonnées dans le repère local selon les formules combinant translation et rotation.

Le changement de repère constitue un outil stratégique pour adapter le référentiel à la géométrie naturelle du problème. Lorsqu'un ingénieur étudie la stabilité d'un pont dont le tablier forme un angle avec la direction du fleuve, il choisit un repère dont l'un des axes s'aligne avec l'axe du pont. Cette décision simplifie les équations structurelles et facilite l'analyse mécanique.

La maîtrise du changement de base et de repère permet de comprendre que les coordonnées constituent une représentation relative, dépendante du référentiel choisi, alors que les objets géométriques eux-mêmes possèdent une existence absolue indépendante de tout système de coordonnées. Cette distinction philosophique entre représentation et essence fonde la compréhension profonde de la géométrie analytique.

1.5. Ressources complémentaires

1.5.1. Q&A

Comment distinguer rigoureusement les composantes d'un vecteur des coordonnées d'un point ?

Les coordonnées d'un point dépendent explicitement du choix de l'origine du repère. Si on déplace l'origine, les coordonnées de tous les points changent. Un vecteur libre, en revanche, représente un déplacement indépendant de toute position initiale. Ses composantes dépendent uniquement du choix de la base, sans intervention de l'origine. Pour un point $M(3,5)$ et un vecteur $\vec{u}(3,5)$, le point se situe à un emplacement précis dans l'espace repéré, tandis que le vecteur indique une direction et une longueur applicables depuis n'importe quel point de départ.

Pourquoi la condition de non-colinéarité s'impose-t-elle pour définir une base du plan ?

Deux vecteurs colinéaires engendrent seulement une droite vectorielle, ensemble unidimensionnel insuffisant pour couvrir le plan entier. Pour atteindre tous les points du plan, il faut combiner deux directions distinctes. La non-colinéarité garantit que les deux vecteurs de base pointent dans des directions différentes, créant ainsi un système de coordonnées bidimensionnel complet. Mathématiquement, cette condition équivaut à exiger que le déterminant formé par les composantes des deux vecteurs soit non nul.

Comment choisir le repère le plus adapté pour résoudre un problème géométrique donné ?

Le choix stratégique du repère repose sur l'identification des symétries et des directions naturelles du problème. Placer l'origine sur un point clé, comme le centre d'un cercle ou le sommet d'un angle droit, simplifie les équations. Aligner les axes avec des directions privilégiées, telles que les côtés d'un triangle rectangle ou les diagonales d'un parallélogramme, réduit le nombre de termes dans les calculs. Un repère bien choisi transforme un problème apparemment complexe en une série d'opérations arithmétiques élémentaires.

Quelle signification géométrique porte le déterminant dans le changement de base ?

Le déterminant $\alpha\delta - \beta\gamma$ formé par les composantes des nouveaux vecteurs de base dans l'ancienne base mesure le rapport des aires entre les parallélogrammes unités des deux bases. Un déterminant positif indique que le changement de base préserve l'orientation du plan, tandis qu'un déterminant négatif signale un retournement. La valeur absolue du déterminant quantifie le facteur d'échelle des aires lors de la transformation. Sa nullité correspond à un écrasement du plan sur une droite, rendant la transformation non inversible.

Comment calculer efficacement le centre de gravité d'un triangle à partir des coordonnées de ses sommets ?

La méthode la plus directe calcule les moyennes arithmétiques des coordonnées des trois sommets. Pour un triangle ABC avec $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$, le centre de gravité G possède les coordonnées $x_G = \frac{x_A+x_B+x_C}{3}$ et $y_G = \frac{y_A+y_B+y_C}{3}$. Cette formule découle de la propriété vectorielle $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, qui caractérise G comme barycentre équipondéré des trois sommets. Le calcul s'effectue en trois additions et deux divisions, opérations élémentaires accessibles sans calculatrice programmable.

1.5.2. Erreurs fréquentes

1. Confondre vecteur et point en utilisant la même notation pour les deux objets. Un point se note avec des parenthèses $M(x, y)$ tandis qu'un vecteur utilise une flèche $\vec{u}(x, y)$ ou des composantes entre parenthèses sans mention du vecteur.

2. Appliquer la formule du milieu à trois points pour obtenir le centre de gravité. Le milieu utilise la moyenne de deux coordonnées avec dénominateur 2, tandis que le centre de gravité d'un triangle exige la moyenne de trois coordonnées avec dénominateur 3.

3. Inverser l'ordre des coordonnées lors du calcul des composantes d'un vecteur, écrivant $(x_A - x_B, y_A - y_B)$ au lieu de $(x_B - x_A, y_B - y_A)$. Cette erreur inverse le sens du vecteur, transformant $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{BA}$.

4. Oublier que la colinéarité autorise un coefficient négatif, concluant à tort que deux vecteurs de sens opposés ne sont pas colinéaires alors qu'ils partagent la même direction.

5. Négliger la condition de non-colinéarité lors de la définition d'une base, acceptant deux vecteurs parallèles comme formant une base valide du plan.

6. Additionner les normes au lieu d'additionner les vecteurs, calculant $\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ au lieu de $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ pour obtenir la distance totale après deux déplacements successifs.

7. Appliquer les formules de changement de repère dans le mauvais sens, transformant les anciennes coordonnées en nouvelles au lieu de l'inverse, ou inversement selon le besoin du problème.

1.5.3. Scénarios et Exercices

Exercice 1 : Vérification d'alignement de villages

Trois villages congolais A, B et C possèdent les coordonnées suivantes dans un repère kilométrique : $A(2,3)$, $B(5,7)$ et $C(8,11)$. Déterminer si ces trois villages sont alignés.

Corrigé : Calculons les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Pour $\overrightarrow{AB}$, on obtient $(5-2,7-3)=(3,4)$. Pour $\overrightarrow{AC}$, on obtient $(8-2,11-3)=(6,8)$. Les vecteurs sont colinéaires si leurs composantes sont proportionnelles. Vérifions : $\frac{6}{3}=2$ et $\frac{8}{4}=2$. Les deux rapports sont égaux, donc $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs sont colinéaires, donc les trois villages sont alignés sur une même droite.

Exercice 2 : Calcul de composantes vectorielles

Dans un repère orthonormé, déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{PQ}$ sachant que $P(-3,5)$ et $Q(4,-2)$. Calculer ensuite la norme de ce vecteur.

Corrigé : Les composantes de $\overrightarrow{PQ}$ sont $(4-(-3),-2-5)=(7,-7)$. La norme se calcule par $\|\overrightarrow{PQ}\|=\sqrt{7^2+(-7)^2}=\sqrt{49+49}=\sqrt{98}=7\sqrt{2}$ unités. Le vecteur pointe vers la droite et vers le bas avec une longueur d'environ 9,9 unités.

Exercice 3 : Détermination du milieu d'un segment

Un segment relie le point $A(1,4)$ au point $B(7,10)$. Calculer les coordonnées de son milieu I.

Corrigé : Appliquons les formules du milieu. L'abscisse de I vaut $x_I=\frac{1+7}{2}=\frac{8}{2}=4$. L'ordonnée de I vaut $y_I=\frac{4+10}{2}=\frac{14}{2}=7$. Le milieu possède donc les coordonnées $I(4,7)$.

Exercice 4 : Centre de gravité d'un triangle

Un triangle possède les sommets $A(0,0)$, $B(6,0)$ et $C(3,9)$. Déterminer les coordonnées de son centre de gravité G.