GÉOMETRIE

& TRIGONOMÉTRIE



CONFORME
AU PROGRAMME
NATIONAL

3ème Année

EDITION 2025

Options humanités

SCIENTIFIQUES



TABLE DES MATIÈRES

PRÉLIMINAIRES **1**

1. Objectifs Généraux du Cours 1
   - 1.1. Maîtrise de l'appareil conceptuel 1
   - 1.2. Développement du raisonnement hypothético-déductif 1
   - 1.3. Articulation entre géométrie et trigonométrie 1
   - 1.4. Capacité de modélisation 1

2. Compétences Visées 2
   - 2.1. Maîtrise des concepts et outils fondamentaux 2
   - 2.2. Application des procédures et des algorithmes de résolution 2
   - 2.3. Structuration du raisonnement déductif et de la démonstration 2

3. Méthodologie et Approche Pédagogique 2
   - 3.1. La Démarche par Problématisation 2
   - 3.2. La Structuration Spiralaire des Compétences 3
   - 3.3. L'Exigence de la Démonstration Rigoureuse 3

4. Matériel et Prérequis 3
   - 4.1. Dotation Matérielle Essentielle 3
   - 4.2. Prérequis en Géométrie et Trigonométrie 3
   - 4.3. Prérequis en Algèbre 4

PARTIE 1. GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE PLANE **5**

Le pont entre l'algèbre et la géométrie 5

Le repère, notre terrain de jeu 5

Les acteurs principaux : points, vecteurs et droites 5

L'objectif : Modéliser le réel 5

CHAPITRE 1. SYSTÈMES DE COORDONNÉES ET TRANSFORMATIONS DU PLAN **6**

1.1. Coordonnées cartésiennes d'un point du plan 6
   - a. L'idée qui a tout changé 6
   - A. Définition du repère cartésien 6
   - B. Coordonnées d'un point 6

FIGURE 1 : RÉF. IMG (8068-6333-8993) **8**

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

Représentation d'un point dans un repère cartésien orthonormé....8
- SCÉNARIOS ET EXERCICES....8

1.2. Coordonnées polaires....10
- a. L'alternative au quadrillage cartésien....10
- A. Définition et Représentation....10

FIGURE 2 : RÉF. IMG (0382-2283-5254)....13

Représentation d'un point M en coordonnées polaires et cartésiennes superposées....13
- B. Formules de Conversion....13
- SCÉNARIOS ET EXERCICES....14

1.3. Changements de repère (translation, rotation et transformations mixtes)....16
- a. L'importance du point de vue....16
- A. La translation de repère....16

FIGURE 3 : RÉF. IMG (7989-3152-4230)....18

Visualisation d'une translation de repère dans le plan cartésien....18
- B. La rotation de repère....18

FIGURE 4 : RÉF. IMG (7157-4827-2487)....21

Visualisation d'une rotation de repère autour de l'origine....21
- C. Les transformations mixtes....21
- Scénarios et Exercices....22

CHAPITRE 2. LA DROITE DANS LE PLAN AFFINE....24

2.1. Équations de la droite (vectorielle, paramétrique, cartésienne, réduite)....24
- a. Le chemin le plus court....24
- A. L'équation vectorielle : le point de départ et la direction....24

FIGURE 5 : RÉF. IMG (3814-0703-9973)....26

Un point et un vecteur directeur définissant une droite unique....26
- B. Les équations paramétriques : les coordonnées décortiquées....26
- C. L'équation cartésienne : la relation implicite....27
- D. L'équation réduite : la fonction affine....27

FIGURE 6 : RÉF. IMG (8532-5166-2568)....29

Interprétation graphique de la pente et de l'ordonnée à l'origine....29
- Scénarios et Exercices....29

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

- Une question de bornage au Kasaï.....29

2.2. Équation normale et forme de Hesse.....31
- a. Une approche par la distance.....31
- A. L'équation normale d'une droite.....31

FIGURE 7 : RÉF. IMG (6667-1500-4660).....34

Représentation graphique de l'équation normale d'une droite.....34
- B. Passage de l'équation cartésienne à l'équation normale.....34

2.3. Faisceaux de droites.....37
- a. L'intuition du point commun et de la direction commune.....37
- A. Faisceau de droites concourantes.....37

FIGURE 8 : RÉF. IMG (7070-9912-8853).....39

Faisceau de droites concourantes issues d'un unique point d'intersection P0.....39
- B. Faisceau de droites parallèles.....39

FIGURE 9 : RÉF. IMG (4931-1949-9932).....42

Faisceau de droites parallèles ayant toutes la même inclinaison.....42
- C. Scénarios et Exercices.....42

2.4. Applications métriques et positions relatives.....44
- a. L'œil et l'algèbre : une méfiance saine.....44
- A. Distance d'un point à une droite.....45

FIGURE 10 : RÉF. IMG (4147-4511-4140).....47

Visualisation des positions relatives de deux droites dans un plan cartésien.....47
- B. Positions relatives et conditions analytiques.....47
- C. Angle aigu entre deux droites sécantes.....48

CHAPITRE 3. LE CERCLE ET SES RELATIONS.....51

3.1. Équation cartésienne et paramétrique du cercle.....51
- a. Le cercle, une perfection géométrique.....51
- A. L'équation cartésienne du cercle.....51

FIGURE 11 : RÉF. IMG (6909-1045-1021).....53

Cercle dans un repère cartésien avec ses paramètres fondamentaux.....53
- B. Les équations paramétriques du cercle.....53

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

- C. Scénarios et Exercices.....54

3.2. Positions relatives d'une droite et d'un cercle.....55

- a. L'intuition et la réalité.....55

FIGURE 12 : RÉF. IMG (8208-2527-6348).....57

Les trois positions possibles d'une droite par rapport à un cercle.....57

- A. Analyse par la distance.....57
- B. Analyse par le discriminant.....58

3.3. Intersection, angles et faisceaux de cercles.....60

- a. Le cercle, une frontière géométrique.....60
- A. Intersection de deux cercles et axe radical.....60

FIGURE 13 : RÉF. IMG (4128-6984-4729).....63

Les trois cas de position relative de deux cercles dans un plan.....63

- B. Angle de deux cercles et orthogonalité.....63

FIGURE 14 : RÉF. IMG (6390-8027-9522).....66

Angle entre deux cercles et condition d'orthogonalité.....66

- C. Faisceaux de cercles.....66
- Scénarios et Exercices.....67

PARTIE 2. GÉOMÉTRIE VECTORIELLE, DE L'ESPACE ET DESCRIPTIVE.....70

a. Du plan à l'espace : une nouvelle dimension.....70

b. Le vecteur : moteur du mouvement et de la force.....70

c. Les objets dans l'espace : positions et relations.....70

d. La géométrie descriptive : l'art de la représentation.....70

CHAPITRE 4. VECTEURS ET PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE.....71

4.1. Repérage et vecteurs de l'espace.....71

- a. Du plan à l'espace.....71
- A. Repère et Coordonnées d'un Point dans l'Espace.....71

FIGURE 15 : RÉF. IMG (4004-8120-0581).....73

Repère orthonormé dans l'espace et les trois axes (x, y, z).....73

- B. Coordonnées d'un Vecteur et Égalité.....73

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

FIGURE 16 : RÉF. IMG (1233-8820-3164) **76**

Construction du vecteur AB à partir des points A et B 76

- Scénarios et Exercices 76
- Une question d'altitude au Kasaï 76

4.2. Norme et distances dans l'espace 78

- a. L'intuition de la mesure 78
- A. Définition et calcul de la norme 78
- B. Distance entre deux points dans l'espace 78

FIGURE 17 : RÉF. IMG (1526-0108-5442) **81**

Représentation visuelle de la distance entre deux points dans un repère 81

- SCÉNARIOS ET EXERCICES 81

4.3. Produit scalaire, orthogonalité et applications métriques 83

- a. L'orthogonalité au quotidien 83
- A. Définition et Propriétés du Produit Scalaire 83
- B. Orthogonalité et Produit Scalaire 83
- C. Applications Métriques : Norme, Distance et Angle 84

FIGURE 18 : RÉF. IMG (7552-0825-8535) **86**

Vecteurs, orthogonalité et mesure de l'angle dans l'espace 86

- L'anecdote du géomètre du Kasaï 86

CHAPITRE 5. GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE – INCIDENCES **89**

5.1. Principes de la projection et de l'épure (Méthode de Monge) 89

- a. Le passage de la 3D à la 2D 89
- A. Le système de projection de Monge 89

FIGURE 19 : RÉF. IMG (4620-3195-0672) **91**

Un point A et ses projections orthogonales sur les plans PH et PV 91

- B. L'épure : le rabattement 91

FIGURE 20 : RÉF. IMG (6222-1012-9336) **93**

L'épure obtenue après rabattement du plan horizontal sur le plan frontal 93

- C. Scénarios et Exercices 93

5.2. Intersection droite-plan et visibilité 95

- a. Le problème du dessinateur 95

- A. Détermination du point d'intersection I.....95

FIGURE 21 : RÉF. IMG (1006-8611-3865).....97

Intersection d'une droite (d) avec un plan (P) en projection.....97

- B. Étude de la visibilité.....97
- SCÉNARIOS ET EXERCICES.....98

5.3. Intersection de deux plans.....100

- a. L'intuition des artistes et la rigueur du géomètre.....100
- A. Postulat fondamental et cas particuliers.....100
- B. Détermination de la droite d'intersection.....101

FIGURE 22 : RÉF. IMG (8150-0578-8088).....103

Visualisation de la droite d'intersection entre deux plans sécants P et Q.....103

- SCÉNARIOS ET EXERCICES.....103

5.4. Positions relatives (parallélisme, perpendicularité).....105

- a. De l'intuition à la règle.....105
- A. Le parallélisme en géométrie descriptive.....106

FIGURE 23 : RÉF. IMG (2216-7648-2455).....108

Représentation du parallélisme de deux droites par leurs projections.....108

- B. La perpendicularité et ses particularités.....108

CHAPITRE 6. POLYÈDRES ET SECTIONS PLANES.....112

6.1. Représentation des polyèdres usuels en épure.....112

- a. Du dessin à la projection.....112
- A. Principe de l'épure de Monge.....112
- B. Représentation d'un polyèdre.....113

FIGURE 24 : RÉF. IMG (5090-9839-9205).....115

Épure d'une pyramide à base carrée reposant sur le plan horizontal.....115

- b. L'anecdote de l'architecte de Matadi.....115

6.2. Sections planes des prismes et pyramides.....117

- a. La coupe parfaite.....117
- A. Nature de la section plane.....118
- B. Cas du prisme et de la pyramide.....118

FIGURE 25 : RÉF. IMG (2849-9171-4208).....120

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

Section d'un prisme droit à base triangulaire par un plan oblique....120
- b. Scénarios et Exercices....121

6.3. Vraies grandeurs, développements et problèmes métriques....123
- a. Le passage de la 2D à la 3D....123
- A. La Vraie Grandeur (VG) d'un Segment....123

FIGURE 26 : RÉF. IMG (7241-9606-4946)....125

Rabattement d'un segment AB pour trouver sa vraie grandeur....125
- B. Développement d'un Polyèdre : le Patron....125
- C. Problèmes Métriques Fondamentaux....126

PARTIE 3. TRIGONOMÉTRIE ET APPLICATIONS....129

a. Au-delà du triangle rectangle....129

b. Les trois outils fondamentaux : sin, cos, tan....129

c. Du calcul abstrait à la réalité du terrain....129

d. Vers le cercle et les fonctions....129

CHAPITRE 7. FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES FONDAMENTALES....130

7.1. Formules d'addition et de soustraction....130
- a. L'intuition trompeuse....130
- A. Formules pour le cosinus....130
- B. Formules pour le sinus....131

FIGURE 27 : RÉF. IMG (1860-8061-4369)....133

Tableau récapitulatif des quatre formules d'addition et de soustraction....133
- b. Scénarios et Exercices....133

7.2. Formules de duplication et de linéarisation....136
- a. Un point de départ, deux chemins....136
- A. Les formules de duplication....136

FIGURE 28 : RÉF. IMG (4159-1979-5082)....138

Visualisation géométrique de la duplication de l'angle sur le cercle unité....138
- B. Les formules de linéarisation....138

FIGURE 29 : RÉF. IMG (6479-8291-4911)....141

Comparaison graphique d'une fonction au carré et de sa forme linéarisée....141

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

- C. Scénarios et Exercices.....141

7.4. Formules de Simpson et transformation somme-produit.....144

- a. L'erreur de l'addition naïve.....144
- A. Origine des formules : la transformation d'une somme en produit.....144
- B. Les quatre formules fondamentales de Simpson.....145

FIGURE 32 : RÉF. IMG (8002-4369-6140).....147

Visualisation de la somme de deux cosinus en un produit modulé.....147

- C. La transformation inverse : du produit à la somme (Formules de Werner).....147

CHAPITRE 8. ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES.....150

8.1. Équations élémentaires et équations réductibles au second degré.....150

- a. Le rythme des solutions.....150
- A. Les trois familles d'équations élémentaires.....150

FIGURE 33 : RÉF. IMG (6697-6452-2090).....152

Solutions de l'équation cos(x) = a sur le cercle trigonométrique.....152

- B. Stratégie pour les équations du second degré.....152

FIGURE 34 : RÉF. IMG (8738-5873-1333).....155

Transformation d'une équation trigonométrique en équation polynomiale simple.....155

- Anecdote : L'ingénieur du barrage d'Inga.....155

8.2. Équations linéaires en sinus et cosinus (type a.cosx + b.sinx = c).....157

- a. L'harmonie cachée des ondes.....157
- A. Le principe de l'angle auxiliaire.....158

FIGURE 35 : RÉF. IMG (8998-9872-2496).....160

Transformation de a.cos(x) + b.sin(x) en une seule sinusoïde.....160

- B. Méthode de résolution et condition d'existence.....160

FIGURE 36 : RÉF. IMG (9791-6804-1779).....163

Étapes clés de la résolution d'une équation linéaire trigonométrique.....163

- C. Exemple d'application directe.....163
- SCÉNARIOS ET EXERCICES.....164

8.3. Équations homogènes et symétriques.....166

- a. Une question d'équilibre et de structure.....166

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

- A. L'équation trigonométrique homogène.....166

FIGURE 37 : RÉF. IMG (2462-8153-1217).....169

Transformation d'une équation homogène en équation du second degré en tangente.....169

- B. L'équation trigonométrique symétrique.....169

8.4. Résolution graphique et analytique des inéquations trigonométriques.....172

- a. L'ordre dans l'ondulation.....172
- A. La méthode graphique : visualiser la solution.....172

FIGURE 38 : RÉF. IMG (8919-9118-4236).....174

Résolution graphique de sin(x) > 1/2 sur le cercle trigonométrique.....174

- B. La méthode analytique : confirmer par le calcul.....174

FIGURE 39 : RÉF. IMG (2549-2992-4646).....176

Graphe de la fonction y=sin(x) et de la droite y=1/2.....176

- C. Scénarios et Exercices.....176

CHAPITRE 9. RÉSOLUTION DES TRIANGLES ET APPLICATIONS.....180

9.1. Rappel des relations métriques dans le triangle rectangle.....180

- a. Le triangle, clé de la mesure du monde.....180
- A. Le Théorème de Pythagore : La base de tout.....180

FIGURE 40 : RÉF. IMG (2886-5893-2850).....182

Triangle rectangle avec ses angles et côtés clairement étiquetés.....182

- B. Les rapports trigonométriques : Sinus, Cosinus, Tangente.....182

FIGURE 41 : RÉF. IMG (6189-2856-0138).....185

Triangle rectangle montrant la hauteur et les projections sur l'hypoténuse.....185

- C. Application et résolution.....185

9.2. Théorème des sinus (Loi des sinus) et ses applications.....187

- a. Le triangle, maître des distances inaccessibles.....187
- A. Énoncé et Formule de la Loi des Sinus.....187

FIGURE 42 : RÉF. IMG (2122-3137-8028).....190

Triangle quelconque ABC inscrit dans son cercle circonscrit de rayon R.....190

- B. Domaines d'application principaux.....190

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

FIGURE 43 : RÉF. IMG (3786-2159-1059) **193**

Un géomètre utilisant un théodolite sur une rive pour mesurer un angle 193

- C. Démonstration de la loi des sinus 193

9.3. Théorème du cosinus (Al-Kashi) et applications (théorème de la médiane) 196

- a. Quand Pythagore ne suffit plus 196
- A. Le théorème d'Al-Kashi ou loi des cosinus 196

FIGURE 44 : RÉF. IMG (7937-3776-9739) **198**

Triangle quelconque ABC annoté pour le théorème d'Al-Kashi 198

- B. Application directe : le théorème de la médiane 198

FIGURE 45 : RÉF. IMG (0394-2062-8775) **201**

Triangle ABC avec la médiane issue du sommet A 201

- C. Scénarios et exercices 201

9.4. Applications topographiques et calcul d'aires (Formule de Héron) 203

- a. Mesurer la terre, un art ancien 203
- A. La Formule de Héron : L'aire par les côtés 203

FIGURE 46 : RÉF. IMG (4762-0858-7759) **206**

Schéma d'un champ triangulaire pour l'application de la formule de Héron 206

- B. L'utilité en arpentage et triangulation 206

ANNEXES **209**

Bibliographie 209

- A. Fondements de la Géométrie Euclidienne 209
- B. Trigonométrie Avancée et Fonctions Circulaires 210
- C. Géométrie Analytique et Vectorielle 211

Index des termes et théorèmes 211

- A. Trigonométrie 211
- B. Produit Scalaire et Géométrie Analytique 213
- C. Théorèmes Majeurs du Triangle 214
- D. Barycentre 215

Webographie et ressources numériques 215

- A. Logiciels de Géométrie Dynamique (LGD) 215
- B. Plateformes de Cours et Contenus Pédagogiques 217
- C. Outils de Calcul Formel et Numérique 218

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

PRÉLIMINAIRES

1. Objectifs Généraux du Cours

1.1. Maîtrise de l'appareil conceptuel

L'objectif premier est la consolidation de l'appareil conceptuel en géométrie et en trigonométrie. L'élève doit acquérir une maîtrise rigoureuse des théorèmes fondamentaux, des propriétés des figures et des transformations géométriques. Cette maîtrise dépasse la simple mémorisation pour viser une compréhension fonctionnelle des outils mathématiques au service de la démonstration et du calcul.

1.2. Développement du raisonnement hypothético-déductif

Ce programme cultive la compétence du raisonnement structuré. La résolution d'exercices et la démonstration de propriétés forment l'élève à bâtir une argumentation logique, à justifier chaque étape par un axiome ou un théorème, et à valider une conclusion de manière irréfutable. L'autonomie intellectuelle dans la construction d'une preuve constitue une finalité centrale.

1.3. Articulation entre géométrie et trigonométrie

Un objectif didactique majeur est l'articulation systématique entre la géométrie pure et les outils trigonométriques. L'élève doit percevoir la trigonométrie non comme un chapitre isolé, mais comme un instrument puissant pour le calcul des grandeurs géométriques (longueurs, angles, aires). Cette synergie renforce une vision unifiée des mathématiques.

1.4. Capacité de modélisation

Finalement, le cours vise à développer la capacité de modélisation. Il s'agit d'habiliter l'élève à traduire une situation-problème, issue des sciences physiques ou de la vie courante, en un modèle géométrique pertinent. Cette compétence implique l'identification des données utiles, le choix des théorèmes adéquats et la mise en œuvre d'une stratégie de résolution efficace.

2. Compétences Visées

2.1. Maîtrise des concepts et outils fondamentaux

La première compétence vise l'appropriation des concepts théoriques fondamentaux de la géométrie plane et de la trigonométrie. Elle évalue la capacité de l'élève à définir, identifier et manipuler les objets géométriques (vecteurs, droites, cercles) ainsi que les relations métriques et trigonométriques dans le triangle. La restitution exacte des définitions, propriétés et théorèmes essentiels constitue le socle de cette compétence. L'élève doit pouvoir mobiliser ce savoir déclaratif de manière précise.

2.2. Application des procédures et des algorithmes de résolution

Une seconde compétence cible le développement d'aptitudes techniques et procédurales. Il s'agit de la capacité à appliquer des formules et des algorithmes pour résoudre des problèmes standards. Cette compétence se manifeste par l'exécution correcte de calculs trigonométriques, la résolution d'équations impliquant des sinus ou cosinus, l'utilisation du produit scalaire pour déterminer des angles et des longueurs, ainsi que la manipulation des coordonnées dans un repère orthonormé. La justesse du calcul et la sélection de la méthode appropriée sont ici centrales.

2.3. Structuration du raisonnement déductif et de la démonstration

Enfin, la compétence terminale réside dans la capacité à construire un raisonnement hypothético-déductif. Elle outrepasse la simple application de formules pour exiger l'agencement logique d'arguments mathématiques. L'élève doit être capable de formuler une hypothèse, d'enchaîner une série de déductions basées sur des propriétés et théorèmes connus, et de parvenir à une conclusion rigoureusement justifiée. La clarté, la rigueur et la cohérence de la démonstration sont les indicateurs clés de sa maîtrise.

---

3. Méthodologie et Approche Pédagogique

3.1. La Démarche par Problématisation

Chaque chapitre s'articule autour d'une situation-problème concrète, inspirée de contextes techniques réels (arpentage à Matadi, balistique à Kamina, ingénierie civile à Lubumbashi). L'objectif est de créer une nécessité cognitive chez l'élève. La théorie et les théorèmes sont ensuite introduits comme des outils de résolution logiques et nécessaires. Cette démarche ancre les concepts

abstraits dans une application immédiate, favorisant une compréhension durable.

3.2. La Structuration Spiralaire des Compétences

L'acquisition des savoirs suit un modèle en spirale. Les notions fondamentales sont d'abord établies, puis réinvesties et complexifiées dans les chapitres ultérieurs. La progression des exercices est calibrée : de la simple application de la formule à la résolution de problèmes complexes mobilisant plusieurs compétences. Cette structuration prépare ainsi directement aux exigences des épreuves nationales type EXETAT.

3.3. L'Exigence de la Démonstration Rigoureuse

Une attention particulière est accordée au raisonnement déductif. Chaque théorème et propriété fait l'objet d'une démonstration détaillée, exposant la chaîne logique qui le valide. L'élève est systématiquement encouragé non pas à mémoriser une formule, mais à maîtriser le cheminement intellectuel qui la justifie. Cela développe la rigueur scientifique indispensable pour les études supérieures.

---

4. Matériel et Prérequis

4.1. Dotation Matérielle Essentielle

La pratique de la géométrie analytique et de la trigonométrie impose une dotation instrumentale précise. Chaque élève dispose d'un compas de bonne qualité, d'une règle graduée, d'une équerre et d'un rapporteur. L'utilisation d'une calculatrice scientifique non programmable est autorisée et encouragée pour la vérification des calculs trigonométriques et des racines carrées. Pour sa part, l'enseignant prévoira les instruments de traçage au tableau (grande équerre, grand compas) afin de garantir la lisibilité et la précision des figures complexes. Une attention particulière est portée à la qualité des tracés, qui soutient la justesse du raisonnement.

4.2. Prérequis en Géométrie et Trigonométrie

Une maîtrise solide des concepts des années antérieures est fondamentale. Cela inclut la connaissance approfondie des propriétés des triangles (isocèles, équilatéraux, rectangles), des quadrilatères, et du cercle. Les théorèmes de Pythagore et de Thalès, ainsi que leurs réciproques, sont considérés comme parfaitement assimilés. La définition des rapports trigonométriques (sinus,

cosinus, tangente) dans le triangle rectangle est un acquis obligatoire. Les notions de vecteurs, de translation et de symétrie constituent également le socle sur lequel les nouveaux chapitres seront construits.

4.3. Prérequis en Algèbre

L'articulation entre la géométrie et le calcul algébrique est au cœur du programme. La manipulation des expressions littérales, le développement, la factorisation et la maîtrise des identités remarquables sont indispensables. L'élève doit pouvoir résoudre sans difficulté des équations et systèmes d'équations du premier et du second degré. Cette aisance calculatoire est la condition nécessaire à l'abord serein de la géométrie analytique, notamment pour la détermination d'équations de droites, de cercles et pour le calcul de distances.

Partie 1. Géométrie Analytique Plane

Le pont entre l'algèbre et la géométrie

Deux mondes mathématiques coexistaient jadis : celui des formes et celui des nombres. La géométrie analytique opère leur fusion. Une figure géométrique, comme une droite ou un cercle, se traduit désormais par une équation algébrique. Inversement, une équation à deux inconnues peut se visualiser comme une courbe dans un plan. Le calcul et l'intuition visuelle deviennent deux facettes d'une même réalité.

Le repère, notre terrain de jeu

Pour localiser un point dans un plan, un système de référence est indispensable. Ce système est le repère cartésien, nommé d'après René Descartes. Il est constitué de deux axes numériques perpendiculaires : l'axe des abscisses (x) et l'axe des ordonnées (y). Tout point du plan est ainsi défini par un couple unique de nombres réels (x, y), ses coordonnées. Ce quadrillage transforme le plan en un espace navigable par le calcul.

Les acteurs principaux : points, vecteurs et droites

Dans ce cadre analytique, les objets fondamentaux de la géométrie sont décrits par des nombres. Un point n'est plus une simple marque, mais un couple de coordonnées. Un vecteur, représentant un déplacement, est un couple de composantes. Une droite devient une équation linéaire du type $a\,x+b\,y+c=0$. Ces définitions algébriques permettent des calculs rigoureux sur des concepts initialement purement visuels.

L'objectif : Modéliser le réel

Cette discipline n'est pas une abstraction pure. Sa finalité est de modéliser des situations concrètes. L'architecte qui dessine un bâtiment à Goma, le pilote qui suit une trajectoire de vol entre Mbuji-Mayi et Kananga, ou le physicien qui étudie le mouvement d'un objet utilisent les principes de la géométrie analytique. Elle fournit les outils pour transformer un problème réel en un système d'équations solubles.

Chapitre 1. Systèmes de Coordonnées et Transformations du Plan

1.1. Coordonnées cartésiennes d'un point du plan

a. L'idée qui a tout changé

Pendant que le philosophe et mathématicien français René Descartes méditait, une idée simple a révolutionné la géométrie. Il a compris qu'on pouvait lier l'algèbre et la géométrie en positionnant chaque point dans un plan grâce à deux nombres. Cette union a donné naissance à la géométrie analytique.

Cette méthode est devenue un outil universel. Un topographe à Isiro dans la Province Orientale l'utilise pour cartographier un terrain. Un pilote d'avion pour Congo Airways se repère grâce à elle. Ce système de repérage est la base de toute la géométrie qui sera abordée.

A. Définition du repère cartésien

Un repère cartésien se compose de deux droites graduées et sécantes, appelées axes. Le point d'intersection de ces deux axes est nommé l'origine, notée O.

L'axe horizontal est l'axe des abscisses, souvent noté (Ox). L'axe vertical est l'axe des ordonnées, noté (Oy). Dans ce manuel, les axes sont perpendiculaires. Le repère est dit orthogonal. Si, de plus, la longueur unité est la même sur les deux axes, le repère est dit orthonormé.

B. Coordonnées d'un point

Chaque point P du plan est associé à un unique couple de nombres réels (x, y), appelé couple de coordonnées.

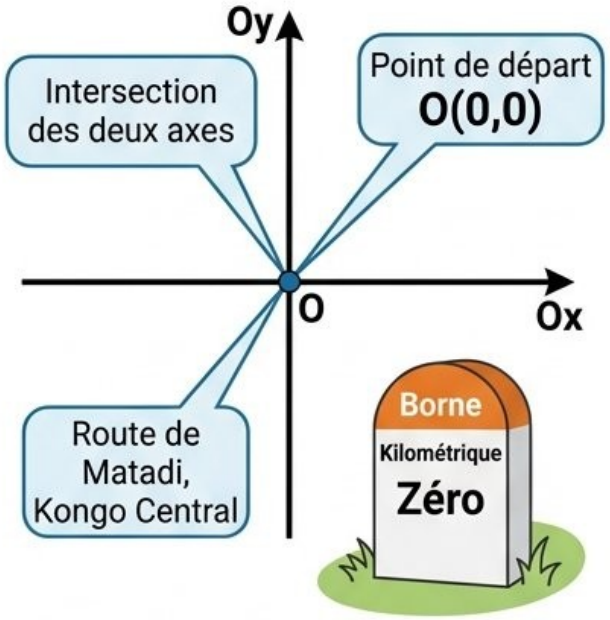
- Le premier nombre, x, est l'**abscisse** du point P. Il correspond à la position du point projeté sur l'axe des abscisses (Ox).
- Le second nombre, y, est l'**ordonnée** du point P. Il correspond à la position du point projeté sur l'axe des ordonnées (Oy).

On note alors $P(x, y)$. Par exemple, le point $A(4, -2)$ a pour abscisse 4 et pour ordonnée -2. L'origine O a toujours pour coordonnées $(0, 0)$.

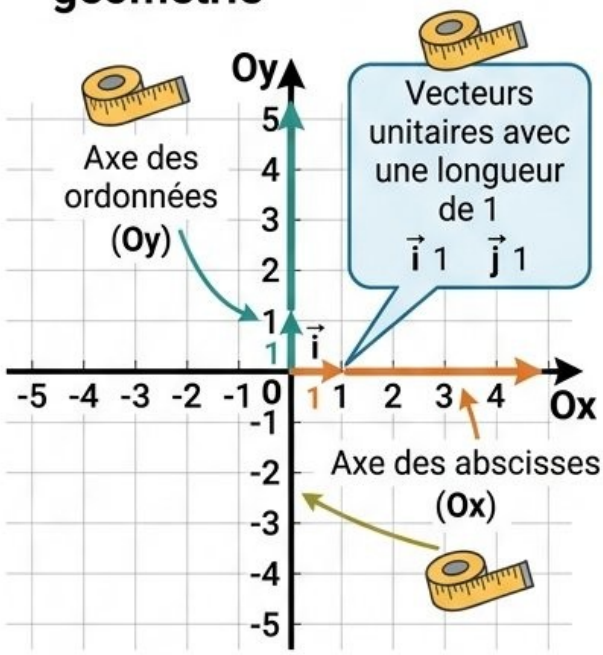
Figure 1 : Réf. IMG (8068-6333-8993)

Représentation d'un point dans un repère cartésien orthonormé

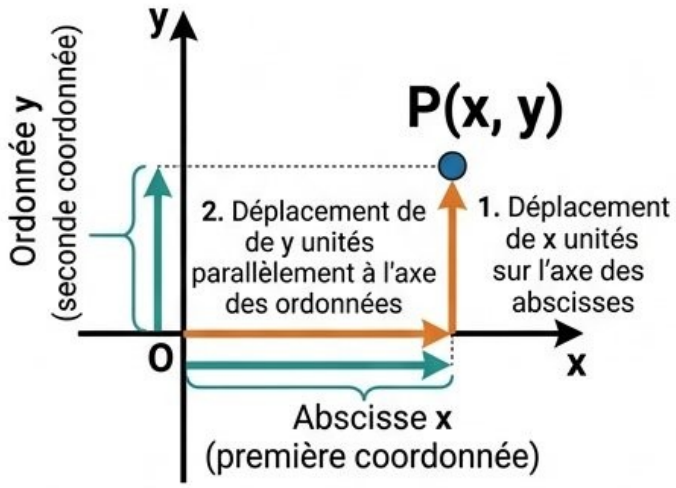
a L'origine du monde (mathématique)



b Les axes, routes de la géométrie



c Localiser un point P(x, y)



Exemple: **P(3, 2)**

d Les quadrants

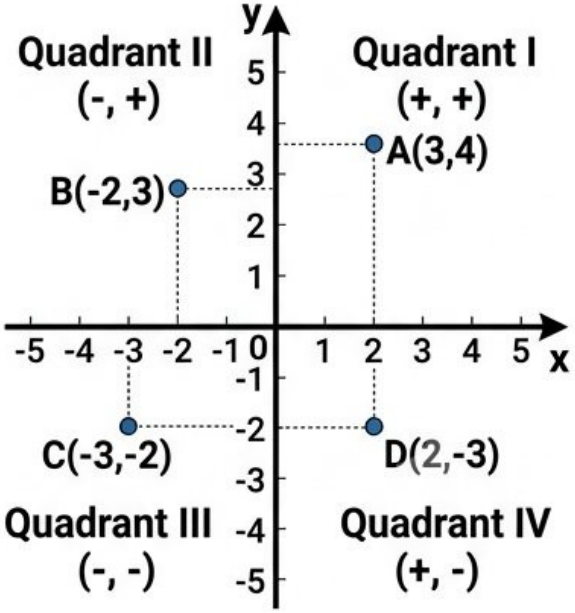


Figure 1 : Réf. IMG (8068-6333-8993)

Représentation d'un point dans un repère cartésien orthonormé

a. L'origine du monde (mathématique)

Le point $O(0,0)$ est l'origine du repère. C'est le point de départ, l'intersection des deux axes. Tout est mesuré par rapport à lui, comme la borne kilométrique zéro sur la route de Matadi au Kongo Central.

b. Les axes, routes de la géométrie

L'axe horizontal (Ox) est l'axe des abscisses. L'axe vertical (Oy) est celui des ordonnées. Ils sont perpendiculaires dans un repère orthogonal. Lorsque leurs vecteurs unitaires ont une longueur de 1, le repère est dit orthonormé, ce qui simplifie tous les calculs de distance.

c. Localiser un point P(x, y)

Pour trouver le point $P(x,y)$, on se déplace de x unités sur l'axe des abscisses, puis de y unités parallèlement à l'axe des ordonnées. L'abscisse est la première coordonnée, l'ordonnée est la seconde. L'ordre est fondamental.

d. Les quadrants

Les deux axes divisent le plan en quatre régions appelées quadrants. La position d'un point dans un quadrant dépend du signe de ses coordonnées (x,y).

SCÉNARIOS ET EXERCICES

Anecdote : La parcelle de Papa Kabasele

Papa Kabasele, un géomètre expérimenté de Mbuji-Mayi au Kasaï-Oriental, est appelé pour régler un litige foncier. Deux voisins se disputent les limites d'une parcelle héritée. Le plan cadastral est ancien et imprécis. Papa Kabasele sort son théodolite et son GPS. Il plante un piquet qui servira d'origine (0,0) à son repère. En se basant sur les vieux documents, il traduit les descriptions en coordonnées : "le grand manguier" devient le point M(15, 40), "le rocher plat"

devient R(-10, 25). En plaçant ces points avec une précision mathématique, il trace les nouvelles limites, acceptées par tous. La géométrie analytique vient de transformer un conflit potentiel en une entente claire, prouvant que les nombres peuvent apporter la paix.

Exercice 1 : Le verger de Maman Hélène

Énoncé : Maman Hélène, agricultrice dans le Kwilu, veut planter quatre nouveaux manguiers dans son champ. Sur son plan, le puits est à l'origine O(0,0). Elle veut placer les arbres aux points suivants : A(3, 5), B(-2, 4), C(-1, -3) et D(4, -2). Représentez le champ de Maman Hélène dans un repère orthonormé et placez les quatre manguiers.

Résolution pas-à-pas :

1. **Étape 1 : Dessiner le repère** Tracez deux axes perpendiculaires, (Ox) et (Oy). Graduez-les de -5 à 5, par exemple. Le point d'intersection est le puits $O(0,0)$.
2. **Étape 2 : Placer le point A(3, 5)** Partez de l'origine O. Déplacez-vous de 3 unités vers la droite (abscisse positive), puis de 5 unités vers le haut (ordonnée positive). Marquez ce point A.
3. **Étape 3 : Placer le point B(-2, 4)** Partez de O. Déplacez-vous de 2 unités vers la gauche (abscisse négative), puis de 4 unités vers le haut (ordonnée positive). Marquez ce point B.
4. **Étape 4 : Placer les points C et D** Procédez de la même manière. Pour C(-1, -3), déplacez-vous de 1 unité à gauche et 3 unités vers le bas. Pour D(4, -2), déplacez-vous de 4 unités à droite et 2 unités vers le bas.

Exercice 2 : Se repérer à l'école

Énoncé : Junior, un élève de 3ème scientifique à Kisangani, regarde un plan de son école. Le mât du drapeau est l'origine O(0,0). Sur le plan, le bureau du Proviseur est au point P et la bibliothèque au point L. Déterminez les coordonnées de P et L en vous basant sur un quadrillage où chaque carré représente 10 mètres. Le point P est à 2 carrés à gauche et 3 carrés en haut. Le point L est à 4 carrés à droite et 1 carré en bas.

Résolution pas-à-pas :

1. **Étape 1 : Analyser la position du Proviseur (P)** Le bureau est à "2 carrés à gauche", ce qui correspond à une abscisse de $x=-2$. Il est à "3 carrés en haut", ce qui correspond à une ordonnée de $y=+3$.
2. **Étape 2 : Écrire les coordonnées de P** Les coordonnées du bureau du Proviseur sont $P(-2,3)$.
3. **Étape 3 : Analyser la position de la bibliothèque (L)** La bibliothèque est à "4 carrés à droite", ce qui donne une abscisse de $x=+4$. Elle est à "1 carré en bas", ce qui donne une ordonnée de $y=-1$.
4. **Étape 4 : Écrire les coordonnées de L** Les coordonnées de la bibliothèque sont $L(4,-1)$.

1.2. Coordonnées polaires

a. L'alternative au quadrillage cartésien

Même si le système cartésien (x,y) semble régner en maître à Kinshasa comme à Kisangani, une autre logique de positionnement existe. Elle est plus intuitive pour un pilote d'avion ou un pêcheur naviguant sur le fleuve Congo. Une telle approche est fondamentale en physique, notamment en mécanique et en électromagnétisme.

Cette méthode ne demande pas deux distances perpendiculaires. Elle utilise une seule distance à partir d'un point fixe et un angle de direction. C'est l'essence même du système de coordonnées polaires, qui décrit une position par un rayon et une orientation.

A. Définition et Représentation

Au lieu d'un quadrillage, le système polaire utilise un point central appelé **pôle** (noté O), équivalent à l'origine du repère cartésien. Depuis ce pôle, on définit une demi-droite de référence, l'**axe polaire**, généralement superposée à l'axe des abscisses positives.

Un point M du plan est alors entièrement défini par un couple (r,θ) où : - r est la **coordonnée radiale** : c'est la distance entre le pôle O et le point M. Par convention, $r\geq 0$. - θ est la **coordonnée angulaire** (ou angle polaire) : c'est l'angle formé entre l'axe polaire et le segment $[OM)$. Il est mesuré dans

le sens trigonométrique (anti-horaire) et s'exprime le plus souvent en radians.

Figure 2 : Réf. IMG (0382-2283-5254)

Représentation d'un point M en coordonnées polaires et cartésiennes superposées

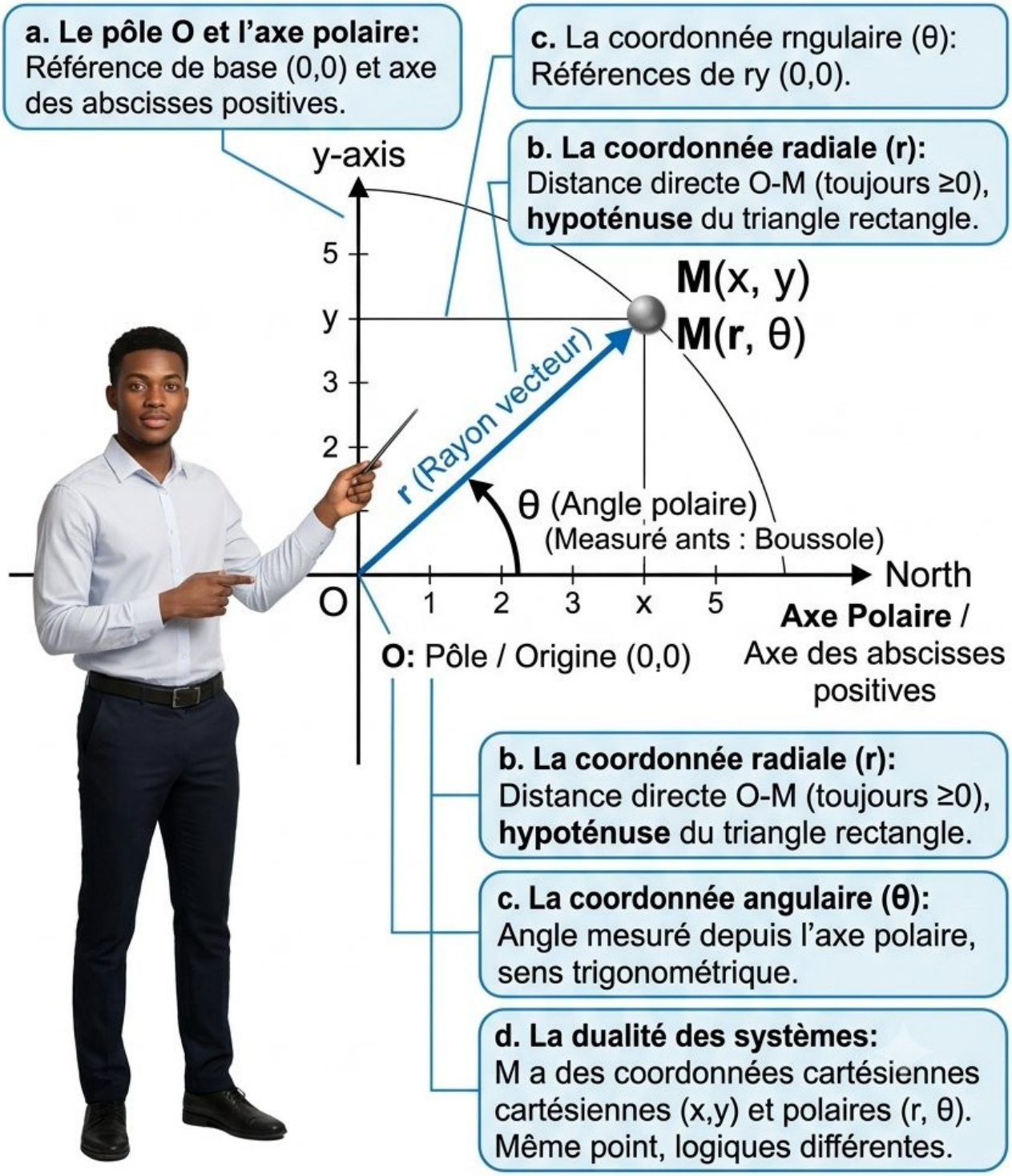


Figure 2 : Réf. IMG (0382-2283-5254)

Représentation d'un point M en coordonnées polaires et cartésiennes superposées

a. Le pôle et l'axe polaire

Le point O est le pôle, équivalent à l'origine (0,0). La demi-droite horizontale est l'axe polaire, aligné sur l'axe des abscisses positives. C'est la référence de base pour mesurer les angles, agissant comme le "Nord" du système.

b. La coordonnée radiale (r)

La distance r (le rayon vecteur) relie le pôle O au point M. C'est une distance directe, toujours positive ou nulle. Sur le schéma, r est l'hypoténuse d'un triangle rectangle imaginaire, symbolisant la distance brute qui sépare le point de l'origine.

c. La coordonnée angulaire (θ)

L'angle θ (l'angle polaire) est mesuré depuis l'axe polaire, dans le sens anti-horaire (trigonométrique). Il donne l'orientation du point M par rapport à la direction de référence. C'est la boussole du système, indiquant la direction à suivre pour trouver le point.

d. La dualité des systèmes

Ce schéma montre la coexistence des deux systèmes. Le point M possède des coordonnées cartésiennes (x, y) et polaires (r, θ). Les deux formalismes décrivent la même position unique dans le plan, mais avec des logiques de construction radicalement différentes.

B. Formules de Conversion

Pour convertir un système à l'autre, les relations trigonométriques fondamentales, issues du triangle rectangle formé par le point M, l'origine O et la projection de M sur l'axe des x, sont appliquées.

a. Passage de polaire à cartésien

Connaissant (r, θ), on trouve (x, y) avec les formules :

$$x = r \cdot \cos(\theta)$$

$$y = r \cdot \sin(\theta)$$

b. Passage de cartésien à polaire

Connaissant (x, y), on trouve (r, θ) avec les formules :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x} \quad (\text{si } x \neq 0)$$

Une attention particulière est requise pour déterminer θ. La fonction arctangente seule ne suffit pas. Il faut analyser le signe de x et y pour situer l'angle dans le bon quadrant. - Si $x>0$, alors $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. - Si $x<0$, alors $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$.

SCÉNARIOS ET EXERCICES

Une question d'urbanisme à Lubumbashi

Maman Hélène, une urbaniste chevronnée de l'Université de Lubumbashi (UNILU), doit concevoir le plan d'éclairage de la Place de la Poste. Son objectif est de placer 12 nouveaux lampadaires à égale distance les uns des autres, sur un cercle parfait de 50 mètres de rayon autour du monument central. Avec un plan cartésien, calculer les coordonnées (x, y) de chaque lampadaire est un véritable casse-tête. Un jeune stagiaire, frais émoulu de l'ISTA, lui propose une autre vision. "Et si le monument était notre pôle ?". D'un coup, le problème devient simple. Chaque lampadaire est à $r = 50$ m. Il suffit de diviser le cercle complet (2π radians) par 12 pour trouver l'angle entre chaque lampadaire. Le premier est à $\theta = 0$, le deuxième à $\theta = \pi/6$, le troisième à $\theta = \pi/3$, et ainsi de suite. La clarté polaire a vaincu la complexité cartésienne.

Exercice 1 : Le topographe du Kwilu

Énoncé : Un topographe en mission près de Bandundu utilise sa station comme pôle de référence. Il repère un baobab remarquable à une distance de 500 mètres, avec un angle de $\frac{\pi}{3}$ radians par rapport à l'Est (son axe polaire). Déterminez les coordonnées cartésiennes de cet arbre par rapport à la station.

Résolution pas-à-pas :

1. **Étape 1 : Identifier les données polaires** Les coordonnées polaires du baobab sont $r=500$ m et $\theta=\frac{\pi}{3}$ rad.
2. **Étape 2 : Appliquer les formules de conversion** On utilise $x=r\cdot\cos(\theta)$ et $y=r\cdot\sin(\theta)$.
3. **Étape 3 : Calculer les coordonnées cartésiennes** Abscisse : $x=500\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=500\cdot\frac{1}{2}=250$ m. Ordonnée : $y=500\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=500\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=250\sqrt{3}$ m.
4. **Étape 4 : Conclure** Les coordonnées cartésiennes du baobab par rapport à la station sont $(250,250\sqrt{3})$.

Exercice 2 : Le radar de l'aéroport de Goma

Énoncé : La tour de contrôle de l'aéroport de Goma (Nord-Kivu) est l'origine d'un repère cartésien. Le radar détecte un aéronef aux coordonnées $(x,y)=(-30,40)$, les unités étant en kilomètres. Pour le guidage, le contrôleur aérien a besoin des coordonnées polaires de l'avion (distance et angle par rapport à l'axe Est).

Résolution pas-à-pas :

1. **Étape 1 : Identifier les données cartésiennes** Les coordonnées sont $x=-30$ km et $y=40$ km.
2. **Étape 2 : Calculer la distance radiale** r La distance est calculée avec la formule de Pythagore : $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-30)^2+40^2}=\sqrt{900+1600}=\sqrt{2500}=50$ km.
3. **Étape 3 : Déterminer l'angle polaire** θ Le point est dans le deuxième quadrant car $x<0$ et $y>0$. On utilise la formule adaptée : $\theta=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\pi=\arctan\left(\frac{40}{-30}\right)+\pi=\arctan\left(-\frac{4}{3}\right)+\pi$. Avec une calculatrice, $\arctan\left(-\frac{4}{3}\right)\approx-0.927$ rad. Donc, $\theta\approx-0.927+3.14159\approx2.214$ rad.

4. **Étape 4 : Conclure** Les coordonnées polaires de l'aéronef sont approximativement $(50\,\text{km}, 2.214\,\text{rad})$. L'avion est à 50 km de la tour, dans une direction de 2.214 radians.

1.3. Changements de repère (translation, rotation et transformations mixtes)

a. L'importance du point de vue

Lorsque l'on pilote un drone au-dessus du Grand Marché de Lubumbashi, on observe la scène depuis une position personnelle. Pour le drone, sa caméra est son "origine du monde". Pour un observateur au sol, l'origine est un autre point fixe. Ces deux points de vue sont pourtant liés.

Changer de repère, c'est traduire mathématiquement ce changement de perspective. Il s'agit de passer d'un système de coordonnées à un autre, sans que les objets observés ne changent de place. Cette opération est fondamentale en physique, en cartographie et en ingénierie.

A. La translation de repère

Une translation de repère déplace l'origine sans modifier l'orientation des axes. Le nouveau repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$ a des axes parallèles à ceux de l'ancien repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit un point M de coordonnées (x, y) dans le repère d'origine O et de coordonnées (x', y') dans le repère d'origine O'. Si les coordonnées de la nouvelle origine O' dans l'ancien repère sont (a, b), la relation vectorielle de Chasles donne : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$.

Cette égalité se traduit par les équations de passage :

$$x = x' + a$$

$$y = y' + b$$

Inversement, pour trouver les nouvelles coordonnées à partir des anciennes, les formules sont :

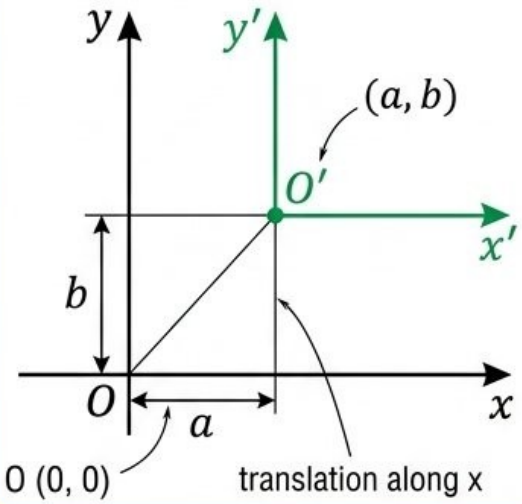
$$x' = x - a$$

$$y' = y - b$$

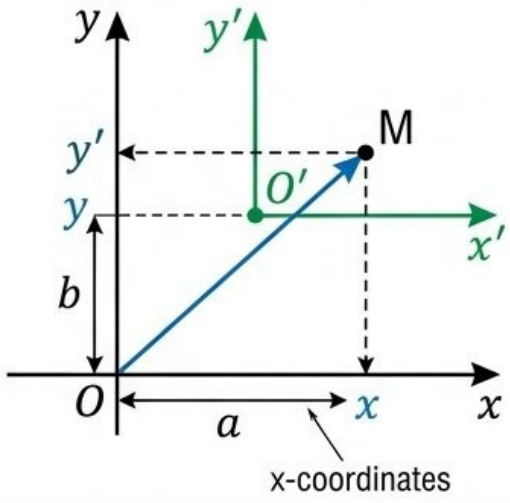
Figure 3 : Réf. IMG (7989-3152-4230)

Visualisation d'une translation de repère dans le plan cartésien

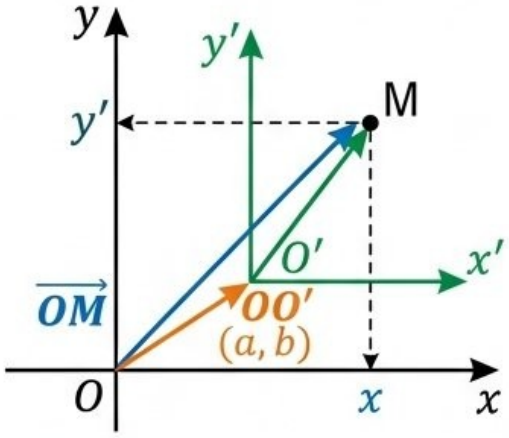
a. L'origine déplacée



b. Le point M invariant



c. La relation vectorielle comme fondement



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

$$x' = x - a$$

$$y' = y - b$$



Calculator

d. Formues de passage directes

$$x' = x - a$$

x-coordinates — translation along x



$$y' = y - b$$

x-coordinates — translation along y

Figure 3 : Réf. IMG (7989-3152-4230)

Visualisation d'une translation de repère dans le plan cartésien

a. L'origine déplacée

L'analyse visuelle montre une nouvelle origine O' de coordonnées (a,b) dans le système initial. Les axes du nouveau repère, bien que partant de O', restent rigoureusement parallèles aux axes initiaux.

b. Le point M invariant

Le point M lui-même ne bouge pas dans l'espace. Seule sa "description" par les coordonnées change. Ses anciennes coordonnées (x,y) et ses nouvelles (x',y') sont directement liées par les coordonnées (a,b) du déplacement de l'origine.

c. La relation vectorielle comme fondement

La formule de Chasles est la clé. Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ est la somme du vecteur de translation $\overrightarrow{OO'}$ et du nouveau vecteur position $\overrightarrow{O'M}$. Toute la démonstration des formules de passage découle de cette simple addition vectorielle.

d. Formules de passage directes

Les équations $x'=x-a$ et $y'=y-b$ sont les outils pratiques. Elles permettent de calculer instantanément les nouvelles coordonnées de n'importe quel point du plan après la translation.

■ ■ ■

B. La rotation de repère

Une rotation de repère fait pivoter les axes d'un angle θ autour d'une origine commune O. Le nouveau repère est $(O,\vec{i'},\vec{j'})$.

Les nouvelles coordonnées (x',y') d'un point $M(x,y)$ après une rotation d'angle θ (sens antihoraire) sont données par les formules :

$$x'=x\cos\theta+y\sin\theta$$

$$y'=-x\sin\theta+y\cos\theta$$