COURS DE MATHEMATIQUES



CONFORME AU PROGRAMME NATIONAL

4è Année

EDITION 2025

Options humanités

SCIENTIFIQUES



TABLE DE MATIERE

PRÉLIMINAIRES 1
0.1. Note aux enseignants et aux élèves 📝 1
- 0.1.1. Philosophie pédagogique du manuel 1
- 0.1.2. Conseils méthodologiques pour l'utilisation 1

0.2. Profil de sortie et compétences visées 🎯 2
- 0.2.1. L'élève en fin de quatrième année scientifique 2
- 0.2.2. Compétences disciplinaires fondamentales 3

0.3. Rappel des symboles et notations mathématiques 🔣 4
- 0.3.1. Logique et Ensembles 4
- 0.3.2. Analyse et Algèbre 5
- 0.3.3. Géométrie et Vecteurs 6
- 0.3.4. Alphabet Grec 7

Chapitre 1 : L'Ensemble des Nombres Complexes (MM6.1 - MM6.3) 11
1.1. Construction de l'ensemble $\mathbb{C}$ et notions de base 11
- 1.1.1. Définition rigoureuse et structure algébrique 11
- 1.1.2. Le conjugué et le module d'un nombre complexe 12
- 1.1.3. Propriétés fondamentales du module 12
- 1.1.4. Représentation géométrique dans le plan complexe 12

1.2. Représentations algébrique et trigonométrique 13
- 1.2.1. Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique .13
- 1.2.2. Argument principal et ensemble des arguments 14
- 1.2.3. Notation exponentielle et formule d'Euler 14
- 1.2.4. Applications géométriques des représentations 14

1.3. Opérations fondamentales et propriétés algébriques 15
- 1.3.1. Multiplication de nombres complexes 15
- 1.3.2. Division et inverse d'un nombre complexe 16
- 1.3.3. Puissances de nombres complexes et formule de Moivre 16
- 1.3.4. Racines n-ièmes d'un nombre complexe 16

1.4. Résolution d'équations dans ℂ 17
- 1.4.1. Équations du second degré à coefficients complexes.....17
- 1.4.2. Calcul des racines carrées d'un nombre complexe.....17
- 1.4.3. Équations bicarrées et équations se ramenant au second degré 18
- 1.4.4. Factorisation de polynômes à coefficients réels.....18
- 1.4.5. Systèmes d'équations complexes 19

1.5. Ressources complémentaires.....19
- 1.5.1. Questions et réponses d'approfondissement 19
- 1.5.2. Confusions et erreurs fréquentes à éviter 21

1.6. Scénarios et Exercices.....22
- 1.6.1. Exercices de compréhension fondamentale 22
- 1.6.2. Scénarios d'assimilation contextuelle.....26

Chapitre 2 : Fonctions Transcendantes (MM6.4 - MM6.5).....30

2.1. Notions sur les fonctions logarithmiques et exponentielles.....30
- 2.1.1. Définition et propriétés de la fonction exponentielle.....30
- 2.1.2. Fonction logarithme népérien 31
- 2.1.3. Fonctions exponentielles de base quelconque.....31
- 2.1.4. Fonctions logarithmiques de base quelconque 32

Chapitre 5 : Calcul Intégral 33

5.1. Primitives d'une fonction et propriétés 33
- 5.1.1. Définition et concept de la fonction primitive 33
- 5.1.2. Propriétés algébriques et linéarité.....34

5.2. Méthodes d'intégration et intégrale définie 34
- 5.2.1. L'intégrale définie et le théorème fondamental 34
- 5.2.2. Techniques d'intégration : Changement de variable et Intégration par parties.....35

5.3. Calcul des aires planes.....36
- 5.3.1. Aire sous une courbe et entre deux courbes.....36

5.4. Calcul des volumes des corps de révolution.....37

- 5.4.1. Principe de la méthode des disques 37
- 5.4.2. Applications industrielles et concrètes 37

5.5. Ressources complémentaires.....38

- 5.5.1. Questions et réponses d'approfondissement.....38
- 5.5.2. Confusions et erreurs fréquentes à éviter 39
- 5.5.3. Scenarios et Exercices.....39

Chapitre 6 : Fondements des Probabilités 52

6.1. Notions de base et vocabulaire probabiliste 52

- 6.1.1. L'expérience aléatoire et l'univers des possibles.....52
- 6.1.2. Définition et axiomes de probabilité 53

6.2. Probabilités conditionnelles 53

- 6.2.1. Concept de probabilité sachant une information 53
- 6.2.2. Théorème de Bayes et Probabilités Totales 54

6.3. Événements indépendants et incompatibles 55

- 6.3.1. Distinction fondamentale entre indépendance et incompatibilité 55
- 6.3.2. Indépendance mutuelle et répétition d'épreuves.....55

6.4. Introduction aux variables aléatoires.....56

- 6.4.1. Définition et Loi de probabilité.....56
- 6.4.2. Espérance mathématique, Variance et Écart-type 57

6.5. Ressources complémentaires.....57

- 6.5.1. Questions et réponses d'approfondissement.....57
- 6.5.2. Confusions et erreurs fréquentes à éviter 58
- 6.5.3. Scenarios et Exercices.....59

Chapitre 7 : Statistique Inférentielle 68

7.1. Calcul de l'espérance mathématique 68

- 7.1.1. Définition et interprétation conceptuelle.....68
- 7.1.2. Application aux prises de décision.....68

7.2. Variance et écart-type.....69

- 7.2.1. Mesure de la dispersion 69
- 7.2.2. L'écart-type et l'analyse de risque.....70

7.3. Conditions d'application de la loi binomiale.....71
- 7.3.1. L'épreuve de Bernoulli.....71
- 7.3.2. Le Schéma de Bernoulli.....71

7.4. Calculs de probabilités selon la loi binomiale.....72
- 7.4.1. La formule générale de probabilité.....72
- 7.4.2. Calcul des probabilités cumulées.....73

7.5. Ressources complémentaires.....73
- 7.5.1. Questions et réponses d'approfondissement.....73
- 7.5.2. Confusions et erreurs fréquentes à éviter 74
- 7.5.3. Scenarios et Exercices.....75

Chapitre 8 : Lieux Géométriques et Coniques 85

8.1. Méthodes de traduction et des génératrices 85
- 8.1.1. Définition des lieux géométriques 85
- 8.1.2. Définitions bifocales et monofocales 85

8.2. Réduction de l'équation générale et classification.....86
- 8.2.1. L'équation quadratique générale.....86
- 8.2.2. Classification par le discriminant 87

8.3. Foyers, directrices et excentricité.....87
- 8.3.1. Éléments caractéristiques de l'Ellipse 87
- 8.3.2. Éléments caractéristiques de l'Hyperbole et de la Parabole ...88

8.4. Centre et axes de symétrie.....89
- 8.4.1. Recherche du centre de symétrie.....89
- 8.4.2. Axes de symétrie 89

8.5. Ressources complémentaires.....90
- 8.5.1. Questions et réponses d'approfondissement 90
- 8.5.2. Confusions et erreurs fréquentes à éviter 90
- 8.5.3. Scenarios et Exercices.....91

Chapitre 9 : Étude Approfondie des Coniques 100
9.1. Pôle et polaire par rapport à une conique 100
- 9.1.1. Définition et relations de conjugaison 100
- 9.1.2. Applications analytiques et géométriques 101

9.2. Tangentes et normales 101
- 9.2.1. Équations de la tangente 101
- 9.2.2. La normale et les propriétés de réflexion 102

9.3. Étude des asymptotes 103
- 9.3.1. Définition et comportement à l'infini 103
- 9.3.2. Asymptotes et équation générale 103

9.4. Diamètres et sommets 104
- 9.4.1. Notion de diamètres conjugués 104
- 9.4.2. Détermination des sommets 105

9.5. Ressources complémentaires 105
- 9.5.1. Questions et réponses d'approfondissement 105
- 9.5.2. Confusions et erreurs fréquentes à éviter 106
- 9.5.3. Scenarios et Exercices 107

Chapitre 10 : Transformations et Espace 116
10.1. Similitudes planes (réel et complexe) 116
- 10.1.1. Définition géométrique et propriétés 116
- 10.1.2. Écriture complexe 116

10.2. Équations des plans dans l'espace 117
- 10.2.1. Détermination par vecteur normal 117
- 10.2.2. Détermination par trois points 117

10.3. Équations des droites dans l'espace 118
- 10.3.1. Représentation paramétrique 118
- 10.3.2. Système d'équations cartésiennes 118

10.4. Intersections et positions relatives 119
- 10.4.1. Positions relatives Droite-Plan 119

- 10.4.2. Positions relatives Plan-Plan et Droite-Droite 119

10.5. Ressources complémentaires 120

- 10.5.1. Questions et réponses d'approfondissement 120
- 10.5.2. Confusions et erreurs fréquentes à éviter 121
- 10.5.3. Scenarios et Exercices 121

Chapitre 11 : Géométrie Descriptive I (MM6.27 - MM6.28) 130

11.1. Notions fondamentales sur le rabattement 130

- 11.1.1. Définition et principe de conservation 130
- 11.1.2. Mécanique du rabattement sur le plan horizontal 131

11.2. Méthodes de rabattement des figures planes 131

- 11.2.1. Rabattement d'un point par le triangle de position 131
- 11.2.2. Rabattement par les droites de plus grande pente 132

11.3. Techniques de relèvement 133

- 11.3.1. Principe de l'opération inverse 133
- 11.3.2. Méthodologie pratique par les horizontales 134

11.4. Applications sur les polygones réguliers 134

- 11.4.1. Construction du cercle et de l'hexagone 134
- 11.4.2. Problématique des toitures et pavages 135

11.5. Ressources complémentaires 136

- 11.5.1. Questions et réponses d'approfondissement 136
- 11.5.2. Confusions et erreurs fréquentes à éviter 136
- 11.5.3. Scenarios et Exercices 137

Chapitre 12 : Géométrie Descriptive II (MM6.29 - MM6.31) 143

12.1. Notions sur la rotation 143

- 12.1.1. Définition et axe de rotation 143
- 12.1.2. Mécanique du mouvement 143

12.2. Rotation d'un point et épure associée 144

- 12.2.1. Rotation autour d'un axe vertical 144
- 12.2.2. Rotation autour d'un axe de bout 144

12.3. Rotation d'une droite (quelconque à particulière) 145
- 12.3.1. Rendre une droite frontale ou horizontale 145
- 12.3.2. Rendre une droite verticale ou de bout 145

12.4. Rotation d'un plan autour d'un axe 146
- 12.4.1. Transformer un plan quelconque en plan de bout 146
- 12.4.2. Mise à l'horizontal (Vraie Grandeur) 146

12.5. Ressources complémentaires 147
- 12.5.1. Questions et réponses d'approfondissement 147
- 12.5.2. Confusions et erreurs fréquentes à éviter 147
- 12.5.3. Scenarios et Exercices 148

ANNEXES ..... a

ANNEXES ..... a

A.1. Tableau des Dérivées et Primitives Usuelles i
- A.1.1. Principes de lecture et notation i
- A.1.2. Fonctions Algébriques Élémentaires i
- A.1.3. Fonctions Transcendantes (Exponentielles et Logarithmes) ii
- A.1.4. Fonctions Trigonométriques iii

A.2. Tables Statistiques : Loi Binomiale iv
- A.2.1. Note méthodologique sur l'usage de la table iv
- A.2.2. Extrait de la Table pour n = 5 et n = 10 iv
- A.2.3. Exemple d'utilisation pratique v

A.3. Tables Statistiques : Loi Normale Centrée Réduite v
- A.3.1. Définition de la fonction de répartition v
- A.3.2. Propriétés de symétrie pour les valeurs négatives vi
- A.3.3. Table de la Loi Normale (Extrait Significatif) vi
- A.3.4. Interpolation linéaire pour les valeurs intermédiaires vi
- A.3.5. Valeurs seuils remarquables vii

A.4. Formulaire Trigonométrique pour l'Analyse vii

- A.4.1. Relations fondamentales et pythagoriciennes viii
- A.4.2. Formules d'addition et de duplication viii
- A.4.3. Formules de transformation de produit en somme (Linéarisation) viii



PRÉLIMINAIRES

0.1. Note aux enseignants et aux élèves

0.1.1. Philosophie pédagogique du manuel

Ce manuel scolaire a été conçu avec une ambition claire : servir de pont rigoureux entre les acquis fondamentaux du cycle inférieur et les exigences académiques supérieures de la cinquième année des humanités scientifiques en République Démocratique du Congo. CD Il ne s'agit pas d'une simple compilation de formules ou d'une suite décousue d'exercices, mais d'un outil structuré pour bâtir une pensée mathématique cohérente, logique et appliquée. Pour l'enseignant, cet ouvrage se veut un partenaire quotidien. Il respecte scrupuleusement le Programme National de l'Enseignement Secondaire, garantissant que chaque heure de cours contribue directement à la couverture des objectifs officiels. L'approche privilégiée est celle de la construction active du savoir : chaque notion nouvelle est introduite par une situation-problème ancrée, autant que faire se peut, dans les réalités congolaises — de la gestion des ressources hydrauliques du bassin du Congo à la géométrie des infrastructures minières du Katanga. Pour l'élève, ce livre est un guide d'autonomie. Les explications sont rédigées dans un langage scientifique précis mais accessible, bannissant l'obscurité inutile tout en refusant la vulgarisation simpliste. L'objectif est de permettre à l'apprenant de revisiter, à tête reposée, les concepts vus en classe, de combler ses lacunes éventuelles et de s'exercer progressivement, du simple calcul d'application à la résolution de problèmes complexes nécessitant une véritable stratégie intellectuelle.

0.1.2. Conseils méthodologiques pour l'utilisation

L'efficacité de ce manuel repose sur une utilisation méthodique et régulière, tant en classe qu'à domicile. **Aux enseignants :**

- Utilisez les situations d'introduction pour susciter le débat scientifique avant de formaliser les théorèmes.
- Ne négligez pas les démonstrations : elles sont le cœur de la rationalité mathématique. Une formule apprise sans comprendre sa genèse est une formule vite oubliée.

- Exploitez la diversité des exercices pour pratiquer la différenciation pédagogique. Les exercices de "fixation" assurent que tous maîtrisent la base, tandis que les "problèmes de synthèse" permettent aux élèves les plus rapides de déployer leur potentiel.
- Insistez sur la qualité de la rédaction : en mathématiques, la clarté de l'exposition est indissociable de la justesse du résultat.

Aux élèves :

- Ne lisez pas ce manuel comme un roman. Lisez-le avec un crayon et du papier à portée de main. Refaites les exemples pas à pas.
- Face à une difficulté, ne vous précipitez pas sur la solution. La recherche infructueuse est souvent plus formatrice que la lecture passive d'un corrigé.
- Apprenez par cœur les définitions et les théorèmes fondamentaux. La compréhension est primordiale, mais la mémorisation précise est nécessaire pour disposer mentalement des outils de raisonnement.
- Utilisez les rubriques "Erreurs fréquentes" pour identifier vos propres pièges et corriger vos réflexes erronés.
- Considérez les mathématiques non comme une corvée abstraite, mais comme un langage universel permettant de décoder le monde, de l'architecture des ponts de Kinshasa aux statistiques de santé publique.

0.2. Profil de sortie et compétences visées 🎯

🟥 0.2.1. L'élève en fin de quatrième année scientifique

Au terme de cette année charnière, l'élève de quatrième année des humanités scientifiques doit avoir opéré une mutation intellectuelle profonde, passant d'une mathématique de l'observation et du calcul numérique à une mathématique de l'abstraction, de la modélisation et de la démonstration. Il ne se contente plus d'appliquer des recettes ; il est capable d'analyser une situation, d'identifier les variables pertinentes, de choisir l'outil mathématique adéquat et de justifier sa démarche avec rigueur. Son profil se caractérise par une autonomie accrue dans le raisonnement hypothético-déductif. Il est capable de manipuler avec aisance les objets fondamentaux de l'analyse

(fonctions, suites), de l'algèbre (polynômes, équations) et de la géométrie (vectorielle et analytique). Surtout, il est préparé à aborder les concepts de limites et de continuité qui constitueront le cœur du programme de cinquième année. Il possède également une conscience aiguë de l'application des mathématiques dans les autres sciences (physique, chimie, économie), comprenant que l'outil mathématique est le socle indispensable à toute démarche scientifique rigoureuse.

0.2.2. Compétences disciplinaires fondamentales

Le programme de mathématique vise le développement de compétences spécifiques, structurées autour de quatre axes majeurs qui traversent tous les chapitres de ce manuel.

Compétence 1 : Maîtriser les concepts et processus mathématiques

- Définir avec précision les objets mathématiques étudiés (fonctions, vecteurs, suites, angles orientés).
- Énoncer et démontrer les propriétés, théorèmes et corollaires figurant au programme.
- Effectuer des calculs algébriques et numériques avec rapidité et fiabilité (simplification, développement, factorisation).
- Représenter graphiquement des fonctions et des figures géométriques en respectant les conventions de notation et d'échelle.
- Passer fluidement d'un registre de représentation à un autre (du graphique à l'algébrique, du géométrique au vectoriel).

Compétence 2 : Raisonner et argumenter

- Construire une chaîne de déductions logiques pour prouver une affirmation ou réfuter une conjecture.
- Utiliser à bon escient les différents types de raisonnement : déductif, par l'absurde, par disjonction de cas, et l'initiation à la récurrence.
- Critiquer un résultat en vérifiant sa vraisemblance, sa dimension ou sa cohérence avec les données initiales.
- Distinguer clairement entre une condition nécessaire et une condition suffisante.

- Structurer une démonstration en séparant clairement les hypothèses, le raisonnement et la conclusion.

Compétence 3 : Résoudre des problèmes

- Traduire un problème concret (physique, économique, géométrique) en langage mathématique (mise en équation, modélisation fonctionnelle).
- Élaborer une stratégie de résolution en décomposant le problème complexe en sous-problèmes plus simples.
- Mobiliser et combiner des savoirs issus de différents domaines (par exemple, utiliser la trigonométrie pour résoudre un problème de géométrie analytique).
- Interpréter les résultats mathématiques obtenus dans le contexte de la situation initiale (pertinence des solutions négatives, unités de mesure).
- Persévérer dans la recherche de solutions face à des situations inédites.

Compétence 4 : Communiquer mathématiquement

- Utiliser le vocabulaire mathématique et les symboles universels avec exactitude.
- Rédiger une solution de manière claire, concise et soignée, lisible par un tiers.
- Présenter oralement une démarche ou un résultat en utilisant un support visuel (tableau, graphique).
- Lire et interpréter des textes scientifiques comportant des données mathématiques (tableaux statistiques, courbes d'évolution).

0.3. Rappel des symboles et notations mathématiques

0.3.1. Logique et Ensembles

La maîtrise du langage symbolique est indispensable pour assurer la concision et l'universalité du discours mathématique. Voici les notations standard utilisées tout au long de l'ouvrage.

- **Ensembles de nombres :**
  - $\mathbb{N}$: Ensemble des entiers naturels (0, 1, 2, ...).

- $\mathbb{Z}$: Ensemble des entiers relatifs (..., -2, -1, 0, 1, 2, ...).
- $\mathbb{D}$: Ensemble des nombres décimaux (nombres à virgule finie).
- $\mathbb{Q}$: Ensemble des nombres rationnels (fractions d'entiers).
- $\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels (tous les nombres sur la droite numérique).
- $\mathbb{R}^*$: Ensemble des réels non nuls.
- $\mathbb{R}_+$: Ensemble des réels positifs ou nuls.
- $\mathbb{C}$: Ensemble des nombres complexes (introduits dans la partie Algèbre).

- **Symboles logiques et ensemblistes :**
  - $\in$: Appartient à. Exemple : $x \in \mathbb{R}$.
  - $\notin$: N'appartient pas à.
  - $\subset$: Est inclus dans. Exemple : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
  - $\cup$: Union. $A \cup B$ est l'ensemble des éléments appartenant à A OU à B.
  - $\cap$: Intersection. $A \cap B$ est l'ensemble des éléments appartenant à A ET à B.
  - $\emptyset$: Ensemble vide.
  - $\forall$: Pour tout, quel que soit (Quantificateur universel).
  - $\exists$: Il existe au moins un (Quantificateur existentiel).
  - $\exists!$: Il existe un unique.
  - $\Rightarrow$: Implique. (Si A est vrai, alors B est vrai).
  - $\Leftrightarrow$: Équivaut à. (A est vrai si et seulement si B est vrai).

0.3.2. Analyse et Algèbre

Ces notations concernent spécifiquement l'étude des fonctions, des équations et des suites.

- **Intervalles :**

- $[a, b]$: Intervalle fermé (a et b inclus). $a \leq x \leq b$.
- $]a, b[$: Intervalle ouvert (a et b exclus). $a < x < b$.
- $[a, b[$: Intervalle semi-ouvert à droite (a inclus, b exclu).
- $+\infty$: Plus l'infini.
- $-\infty$: Moins l'infini.

- **Fonctions :**
  - $f: A \to B$: Fonction f définie de l'ensemble A vers l'ensemble B.
  - $x \mapsto f(x)$: À x, on associe l'image f(x).
  - D_f ou $Domf$: Domaine de définition de la fonction f.
  - $f \circ g$: Composée de fonctions (f rond g). $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$.
  - $\lim\limits_{x \to a} f(x)$: Limite de f(x) lorsque x tend vers a.
- **Valeur absolue et partie entière :**
  - $|x|$: Valeur absolue de x. $|x| = x$ si $x \geq 0$, $|x| = -x$ si $x < 0$.
  - $E(x)$ ou $[x]$: Partie entière de x (le plus grand entier inférieur ou égal à x).
- **Symboles de sommation et produit :**
  - $\sum_{i=1}^{n} u_i$: Somme des termes $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. (Sigma majuscule).
  - $\prod_{i=1}^{n} u_i$: Produit des termes $u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$. (Pi majuscule).
  - $n!$: Factorielle n. $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$. Par convention $0! = 1$.

0.3.3. Géométrie et Vecteurs

La rigueur géométrique exige une distinction nette entre les objets (points, droites) et les grandeurs (longueurs, mesures).

- **Objets géométriques :**
  - (AB) : Droite passant par les points A et B.
  - $[AB]$: Segment d'extrémités A et B.

- $[AB)$: Demi-droite d'origine A passant par B.
- $A\hat{O}B$: Angle géométrique de sommet O.

- **Grandeurs et mesures :**
  - AB ou $d(A,B)$: Longueur du segment [AB] (nombre réel positif).
  - $mes(A\hat{O}B)$: Mesure de l'angle en degrés ou en radians.
- **Vecteurs :**
  - $\vec{u}$ ou $\overrightarrow{AB}$: Vecteur.
  - $\vec{0}$: Vecteur nul.
  - $||\vec{u}||$: Norme (longueur) du vecteur u.
  - $\vec{u} \cdot \vec{v}$: Produit scalaire des vecteurs u et v.
  - $\vec{u} \perp \vec{v}$: Vecteurs orthogonaux.
  - $\vec{u} // \vec{v}$: Vecteurs colinéaires.
  - $\det(\vec{u},\vec{v})$: Déterminant de deux vecteurs.
- **Repérage :**
  - $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$: Repère du plan.
  - $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$: Repère de l'espace.
  - $M(x,y)$: Coordonnées du point M dans le plan.

0.3.4. Alphabet Grec

L'alphabet grec est couramment utilisé en mathématiques. Voici les lettres les plus fréquentes à connaître impérativement.

- α (alpha), β (bêta), γ (gamma), θ (thêta), ϕ (phi) : Souvent utilisées pour désigner des angles.
- Δ (Delta majuscule) : Désigne souvent le discriminant d'une équation du second degré, une droite, ou une variation.
- δ (delta minuscule) : Désigne une petite variation ou une distance.

- ϵ (epsilon) : Désigne une quantité très petite, arbitrairement proche de zéro.
- λ (lambda), μ (mu) : Souvent utilisées comme scalaires ou coefficients dans les combinaisons linéaires.
- π (pi) : Rapport de la circonférence au diamètre ($\approx 3{,}14159$).
- Σ (Sigma) : Somme.
- Ω (Oméga) : Désigne souvent l'univers des possibles en probabilités ou un centre de similitude.
- ω (oméga) : Désigne souvent une vitesse angulaire ou une racine de l'unité.

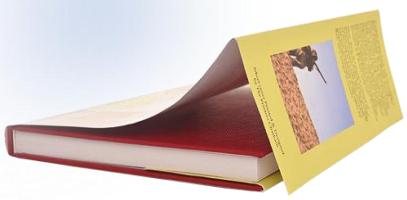
Éditions Donel C.
Direction Éditoriale et Conception Générale :
MURHULA BAZIKANGE M.
Pour contacts, mon site web :
https://murhulabazikange.com/

© 2025, Donel Consulting, Kin. RDC
Tous droits réservés.

Pour l'excellence de l'éducation en RDC,
Tous les manuels scolaires en un seul endroit,
sur ce site web :
https://manuels-scolaires-rdc.com/

Pour plus de détails, scannez ceci :

PARTIE I



Chapitre 1 : L'Ensemble des Nombres Complexes (MM6.1 - MM6.3)

1.1. Construction de l'ensemble $\mathbb{C}$ et notions de base

L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ constitue une extension algébrique de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, construite pour résoudre l'équation $x^2 + 1 = 0$ qui ne possède aucune solution dans $\mathbb{R}$. Cette construction repose sur l'introduction de l'unité imaginaire, notée i, définie par la propriété fondamentale $i^2 = -1$. L'ensemble $\mathbb{C}$ se définit alors comme l'ensemble des expressions de la forme $z = a + bi$, où a et b sont des nombres réels, a représentant la partie réelle notée $\text{Re}(z)$ et b la partie imaginaire notée $\text{Im}(z)$.

1.1.1. Définition rigoureuse et structure algébrique

Un nombre complexe z s'écrit sous la forme canonique $z = a + bi$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$. L'ensemble $\mathbb{C}$ muni de l'addition et de la multiplication forme un corps commutatif, c'est-à-dire une structure algébrique où toutes les opérations arithmétiques usuelles sont définies et possèdent les propriétés de commutativité, d'associativité et de distributivité . Cette structure garantit que toute combinaison linéaire de nombres complexes produit un nombre complexe, assurant ainsi la fermeture de l'ensemble sous ces opérations.

La partie réelle $a = \text{Re}(z)$ et la partie imaginaire $b = \text{Im}(z)$ d'un nombre complexe $z = a + bi$ sont des nombres réels qui déterminent entièrement le nombre complexe . Deux nombres complexes $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $z_2 = a_2 + b_2 i$ sont égaux si et seulement si leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires sont égales, soit $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$. Cette condition d'égalité permet de résoudre des systèmes d'équations en identifiant séparément les parties réelles et imaginaires.

1.1.2. Le conjugué et le module d'un nombre complexe

Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + bi$ est le nombre complexe noté $\overline{z}$ défini par $\overline{z} = a - bi$. Cette opération de conjugaison transforme la partie imaginaire en son opposé tout en conservant la partie réelle inchangée . Le conjugué possède des propriétés algébriques fondamentales : pour tous nombres complexes z_1 et z_2, on a $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ et $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Le module d'un nombre complexe $z = a + bi$ est le nombre réel positif noté $|z|$ défini par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ce module représente la distance entre le point d'affixe z et l'origine du plan complexe, généralisant ainsi la notion de valeur absolue des nombres réels . Une propriété essentielle relie le module au conjugué : pour tout nombre complexe z, on a $z \cdot \overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$. Cette relation permet notamment de rationaliser les dénominateurs contenant des nombres complexes lors des opérations de division.

1.1.3. Propriétés fondamentales du module

Le module satisfait l'inégalité triangulaire : pour tous nombres complexes z_1 et z_2, on a $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Cette inégalité exprime que dans le plan complexe, la longueur d'un côté d'un triangle ne peut excéder la somme des longueurs des deux autres côtés . La multiplicativité du module constitue une autre propriété centrale : $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ pour tous nombres complexes z_1 et z_2 .

Un nombre complexe z est nul si et seulement si son module est nul, soit $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$. Pour tout nombre complexe non nul z, le module de son inverse vérifie $|z^{-1}| = |z|^{-1} = \frac{1}{|z|}$. Ces propriétés du module s'avèrent indispensables pour étudier la convergence des suites de nombres complexes et pour analyser le comportement des fonctions à valeurs complexes.

1.1.4. Représentation géométrique dans le plan complexe

Le plan complexe, appelé plan d'Argand ou plan de Gauss, permet de représenter géométriquement les nombres complexes en associant à chaque nombre $z = a + bi$ le point de coordonnées cartésiennes (a, b) . L'axe des abscisses correspond à l'axe réel et porte les nombres complexes de partie imaginaire nulle, tandis que l'axe des ordonnées constitue l'axe imaginaire et porte les nombres complexes de partie réelle nulle . Cette représentation

transforme les opérations algébriques sur les nombres complexes en transformations géométriques du plan.

L'addition de deux nombres complexes $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $z_2 = a_2 + b_2 i$ correspond à l'addition vectorielle de leurs images dans le plan : le point d'affixe $z_1 + z_2$ est obtenu par la règle du parallélogramme appliquée aux points d'affixes z_1 et z_2 . Le conjugué $\overline{z}$ d'un nombre complexe z correspond au symétrique du point d'affixe z par rapport à l'axe réel . Cette interprétation géométrique facilite la visualisation des propriétés algébriques et permet d'établir des démonstrations intuitives de certaines relations entre nombres complexes.

1.2. Représentations algébrique et trigonométrique

Tout nombre complexe non nul admet une représentation trigonométrique qui exprime sa position dans le plan complexe à l'aide de coordonnées polaires . Cette forme trigonométrique s'écrit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, où $r = |z|$ désigne le module du nombre complexe et θ représente un argument de z, c'est-à-dire une mesure de l'angle orienté que forme le vecteur d'affixe z avec l'axe réel positif . L'argument n'est défini qu'à un multiple de 2π près, reflétant la périodicité des fonctions trigonométriques .

1.2.1. Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique

Pour convertir un nombre complexe $z = a + bi$ de sa forme algébrique vers sa forme trigonométrique, il faut d'abord calculer son module $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ensuite, on détermine un argument θ en résolvant le système d'équations $\cos\theta = \frac{a}{r}$ et $\sin\theta = \frac{b}{r}$. La connaissance simultanée du cosinus et du sinus de l'argument permet de situer précisément l'angle dans le plan trigonométrique et d'éviter les ambiguïtés liées aux fonctions trigonométriques réciproques.

Lorsque $a > 0$, un argument principal peut être obtenu par $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$. Si $a < 0$ et $b \geq 0$, alors $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$, tandis que si $a < 0$ et $b < 0$, on a $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi$. Dans les cas particuliers où $a = 0$ et $b > 0$, l'argument vaut $\theta = \frac{\pi}{2}$, et lorsque $a = 0$ et $b < 0$, on obtient $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Ces formules couvrent tous les quadrants du plan complexe et permettent une détermination systématique de l'argument.

1.2.2. Argument principal et ensemble des arguments

L'argument principal d'un nombre complexe non nul z, noté $\mathrm{Arg}(z)$ ou $\arg(z)$, est l'unique argument appartenant à l'intervalle $]-\pi,\pi]$. Cette convention normalise le choix de l'argument parmi l'infinité de valeurs possibles et facilite les calculs numériques . L'ensemble de tous les arguments d'un nombre complexe z s'écrit $\{\mathrm{Arg}(z)+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$, exprimant que deux arguments quelconques diffèrent d'un multiple entier de 2π .

Les propriétés de l'argument sous les opérations algébriques s'énoncent modulo 2π : pour deux nombres complexes non nuls z_1 et z_2, un argument de leur produit est $\arg(z_1\cdot z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$. De même, un argument du quotient vérifie $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg(z_1)-\arg(z_2)\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$. Pour le conjugué, on obtient $\arg(\overline{z})=-\arg(z)\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$, reflétant la symétrie par rapport à l'axe réel .

1.2.3. Notation exponentielle et formule d'Euler

La formule d'Euler établit une relation fondamentale entre les fonctions trigonométriques et la fonction exponentielle complexe : pour tout nombre réel θ, on a $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$. Cette identité remarquable permet d'écrire tout nombre complexe non nul sous la forme exponentielle $z=re^{i\theta}$, où $r=|z|$ et $\theta=\arg(z)$. La notation exponentielle simplifie considérablement les calculs impliquant des produits, des quotients et des puissances de nombres complexes.

Le produit de deux nombres complexes en forme exponentielle s'écrit directement $z_1\cdot z_2=r_1e^{i\theta_1}\cdot r_2e^{i\theta_2}=(r_1r_2)e^{i(\theta_1+\theta_2)}$. Cette formule montre que la multiplication de deux nombres complexes multiplie leurs modules et additionne leurs arguments . De manière analogue, le quotient s'exprime par $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$, divisant les modules et soustrayant les arguments . La formule d'Euler transforme ainsi les opérations algébriques complexes en opérations arithmétiques simples sur les modules et les arguments.

1.2.4. Applications géométriques des représentations

La représentation trigonométrique permet d'interpréter la multiplication par un nombre complexe de module 1 comme une rotation dans le plan . Multiplier

un nombre complexe z par $e^{i\alpha}$ effectue une rotation d'angle α autour de l'origine, préservant le module de z . Plus généralement, la multiplication par un nombre complexe $w = \rho e^{i\alpha}$ combine une rotation d'angle α et une homothétie de rapport ρ .

La division d'un nombre complexe z par un nombre complexe non nul w correspond à la composition d'une rotation d'angle $-\arg(w)$ et d'une homothétie de rapport $\frac{1}{|w|}$. Ces interprétations géométriques s'avèrent particulièrement utiles pour résoudre des problèmes de géométrie plane utilisant les nombres complexes comme coordonnées . La conjugaison complexe, quant à elle, réalise une réflexion par rapport à l'axe réel, transformant un angle θ en $-\theta$ tout en préservant le module .

1.3. Opérations fondamentales et propriétés algébriques

Les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de division se définissent sur l'ensemble des nombres complexes en étendant naturellement les opérations correspondantes sur les nombres réels . L'addition de deux nombres complexes $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $z_2 = a_2 + b_2 i$ se calcule en additionnant séparément les parties réelles et les parties imaginaires : $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$. Cette opération est commutative, associative, possède un élément neutre $0 = 0 + 0i$ et tout nombre complexe $z = a + bi$ admet un opposé $-z = -a - bi$ tel que $z + (-z) = 0$.

1.3.1. Multiplication de nombres complexes

Le produit de deux nombres complexes $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $z_2 = a_2 + b_2 i$ s'obtient en appliquant la distributivité et en utilisant la relation $i^2 = -1$: $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$. Cette formule résulte du développement de $(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2$ et de la substitution $i^2 = -1$. La multiplication dans $\mathbb{C}$ conserve toutes les propriétés de la multiplication réelle : elle est commutative, associative, distributive par rapport à l'addition et possède un élément neutre $1 = 1 + 0i$.

En utilisant la forme trigonométrique, le produit de $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ devient $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$. Cette formule découle des formules d'addition pour le cosinus et le sinus : $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2$ et $\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2$. La forme exponentielle condense ces calculs en $z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

1.3.2. Division et inverse d'un nombre complexe

Tout nombre complexe non nul $z = a + bi$ possède un inverse multiplicatif z^{-1} tel que $z \cdot z^{-1} = 1$. Cet inverse se calcule en multipliant le numérateur et le dénominateur de $\frac{1}{z}$ par le conjugué $\overline{z}$: $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$. Cette formule exprime l'inverse sous forme algébrique en fonction des parties réelles et imaginaires du nombre complexe initial .

La division de deux nombres complexes $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $z_2 = a_2 + b_2 i$ avec $z_2 \neq 0$ s'effectue en multipliant z_1 par l'inverse de z_2 : $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}$. En forme trigonométrique, le quotient s'écrit simplement $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$ ou $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$ en notation exponentielle .

1.3.3. Puissances de nombres complexes et formule de Moivre

La formule de Moivre établit que pour tout nombre réel θ et tout entier naturel n, on a $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$. Cette formule se démontre par récurrence en utilisant les formules d'addition trigonométriques ou directement par la notation exponentielle : $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$. Elle permet de calculer efficacement les puissances de nombres complexes exprimés en forme trigonométrique : si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, alors $z^n = r^n\big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\big)$.

La formule de Moivre s'étend aux exposants entiers négatifs : pour $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ non nul et $n \in \mathbb{Z}$ négatif, on a $z^n = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$ où $r^n = \frac{1}{r^{|n|}}$. Cette généralisation découle de la définition de l'inverse d'un nombre complexe en forme trigonométrique : $z^{-1} = \frac{1}{r}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$. La formule de Moivre constitue un outil puissant pour linéariser des puissances de fonctions trigonométriques et pour établir des identités trigonométriques.

1.3.4. Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Étant donné un nombre complexe non nul $w = \rho e^{i\phi}$ et un entier naturel $n \geq 2$, les racines n-ièmes de w sont les solutions de l'équation $z^n = w$. En posant $z = re^{i\theta}$, l'équation devient $r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\phi}$, ce qui implique $r^n = \rho$ et $n\theta = \phi + 2k\pi$ pour un entier k . On obtient ainsi $r = \sqrt[n]{\rho}$ et $\theta = \frac{\phi + 2k\pi}{n}$ pour $k = 0,1,2,\ldots,n-1$.