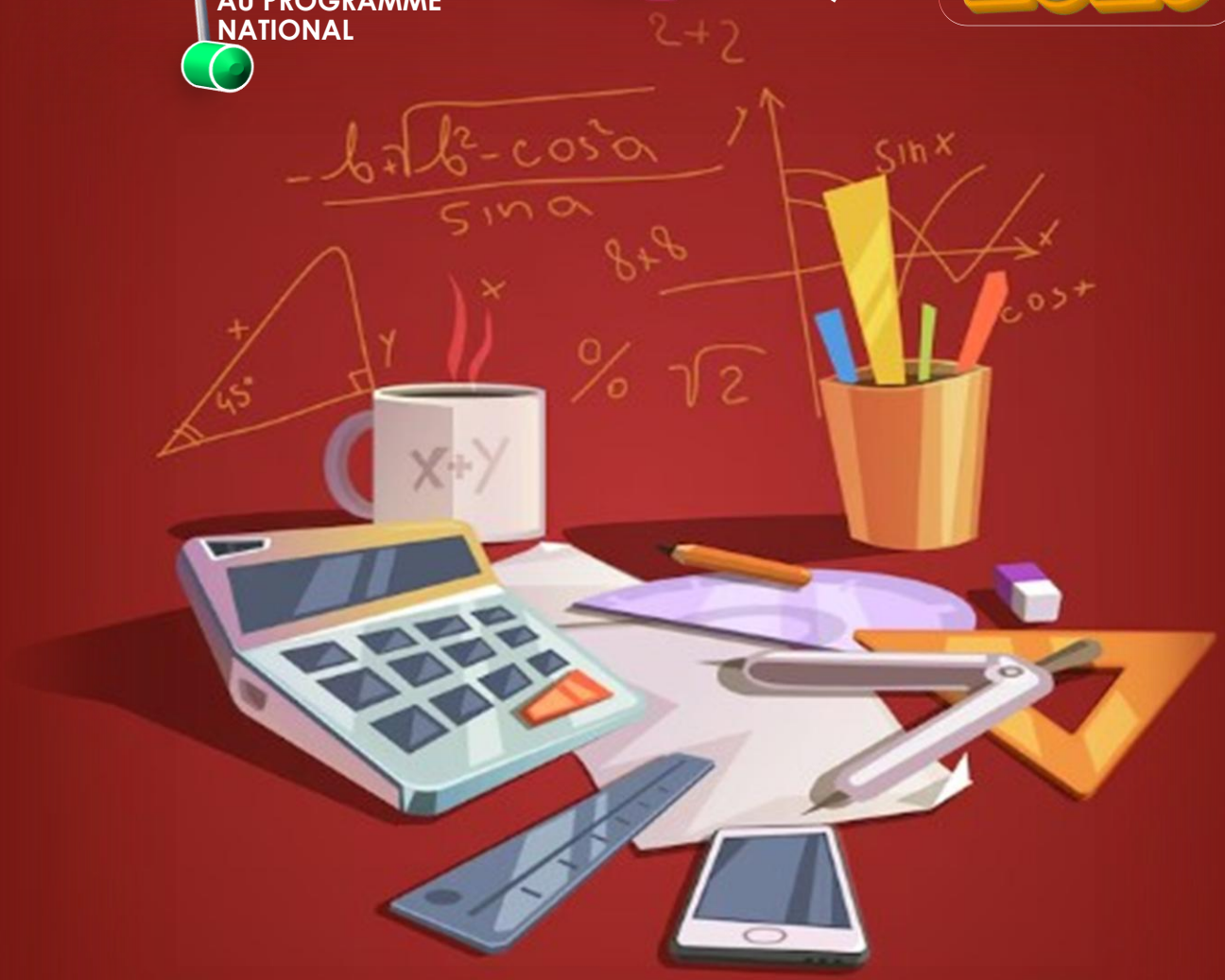
ALGÈBRE

7è Année

CONFORME
AU PROGRAMME
NATIONAL

EDITION
2025





Conforme au Programme national

TABLE DES MATIÈRES

PRÉLIMINAIRES **1**

Note pédagogique à l'attention de l'enseignant 1

- 1. La transition de l'arithmétique à l'algèbre 1
- 2. La construction du sens des variables 1
- 3. La primauté du raisonnement sur la technique 1
- 4. L'exploitation de l'erreur comme outil didactique 1

Objectifs généraux du cours 2

- 1. Consolidation de la pensée symbolique 2
- 2. Développement des compétences opératoires 2
- 3. Structuration du raisonnement déductif 3

Méthodologie et approche par compétences 3

- 1.1. Articulation entre savoirs et situations-problèmes 3
- 1.2. Structure ternaire de la leçon 3
- 1.3. Finalité : la compétence mathématique opérationnelle 3

Bibliographie sélective et sources 4

- 1. Fondements Didactiques et Pédagogiques 4
- 2. Références Scientifiques en Algèbre 4
- 3. Conformité au Programme National 4

PARTIE 1 : NOMBRES NATURELS, NUMÉRATION ET ARITHMÉTIQUE **5**

a. L'outil le plus ancien du monde 5

b. Un code pour tout écrire 5

c. L'art de faire bouger les nombres 5

d. L'objectif : résoudre les problèmes du quotidien 5

CHAPITRE 1 : EXPONENTIATION ET POLYNÔMES ARITHMÉTIQUES **6**

1.1. La puissance d'un nombre dans N 6

- a. L'idée derrière la puissance 6
- A. Définition et Vocabulaire 6

FIGURE 1 : RÉF. IMG (8606-0227-7191) **7**

Anatomie d'une puissance mathématique pour débutants 7

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

- B. Cas particuliers à maîtriser....7

FIGURE 2 : RÉF. IMG (0213-0773-8245)....10

Croissance visuelle d'une puissance avec la base 2....10

- C. Scénarios et Exercices....10

1.2. Écriture polynomiale et valeur numérique d'un nombre....12

- a. L'énigme des chiffres....12
- A. L'écriture polynomiale d'un nombre....12

FIGURE 3 : RÉF. IMG (4925-2439-5619)....13

Décomposition visuelle d'un nombre en puissances de dix....13

- B. La valeur numérique d'un nombre....13

FIGURE 4 : RÉF. IMG (6247-7858-4512)....14

La valeur de position des chiffres dans les prix au marché....14

- Scénarios et Exercices....14
- Anecdote : Le comptage au port de Matadi....14

1.3. Applications pratiques de l'exponentiation....16

- a. L'effet boule de neige....16
- A. L'exponentiation en géométrie : Aires et Volumes....16

FIGURE 5 : RÉF. IMG (2939-4850-9585)....17

Représentation géométrique de la puissance 2 (carré) et 3 (cube)....17

- B. Écrire les grands nombres : la notation scientifique....17

FIGURE 6 : RÉF. IMG (3352-5625-3229)....18

Tableau de conversion des grands nombres en puissances de 10....18

- C. Scénarios et Exercices....18

CHAPITRE 2 : SYSTÈMES DE NUMÉRATION ET BASES....21

2.1. Notion de base et groupements....21

- a. L'origine du comptage....21
- A. Le groupement : l'idée fondamentale....21

FIGURE 7 : RÉF. IMG (3025-2606-4498)....22

Groupement de bâtonnets pour illustrer le concept de base numérique....22

- B. La base 10 : notre système quotidien....22

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

FIGURE 8 : RÉF. IMG (8617-4750-4591)..... 25

Décomposition d'un nombre en base 10 (unités, dizaines, centaines)..... 25

- C. Scénarios et Exercices..... 25

2.2. Conversion entre une base quelconque et la base 10..... 27

- a. Le pont entre les mondes numériques..... 27
- A. Le Principe de Position : La Formule Polynômiale..... 27

FIGURE 9 : RÉF. IMG (4710-3658-4451)..... 29

Décomposition d'un nombre en base 5 pour le convertir en base 10..... 29

- B. Application : Du Binaire (Base 2) au Décimal (Base 10)..... 29

FIGURE 10 : RÉF. IMG (8722-7403-4964)..... 32

Conversion pas-à-pas d'un nombre binaire en nombre décimal..... 32

- C. Scénarios et Exercices..... 32

2.3. Applications aux technologies numériques (binaire, hexadécimal)..... 34

- a. Le langage secret des ordinateurs..... 34
- A. Le langage des machines : le binaire (base 2)..... 34

FIGURE 11 : RÉF. IMG (1698-5234-6189)..... 35

Conversion d'un nombre décimal en binaire par divisions successives par 2..... 35

- B. Un raccourci pour les informaticiens : l'hexadécimal (base 16)..... 35

FIGURE 12 : RÉF. IMG (1031-7713-3969)..... 37

Tableau de correspondance entre binaire, décimal et hexadécimal pour les nombres..... 37

- Scénarios et Exercices..... 37
- Anecdote : le code couleur de l'ordinateur de papa Fiston..... 37

CHAPITRE 3 : ARITHMÉTIQUE DANS N ET DIVISIBILITÉ..... 40

3.1. Opérations fondamentales et leurs propriétés..... 40

- a. Une erreur commune..... 40
- A. L'addition et ses propriétés dans N..... 40

FIGURE 13 : RÉF. IMG (1993-7506-1784)..... 41

Visualisation des propriétés de l'addition avec des paniers de fruits..... 41

- B. La multiplication et ses propriétés dans N..... 41

FIGURE 14 : RÉF. IMG (7884-6796-2131)..... 44

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

La distributivité de la multiplication sur l'addition en action....44
- C. Application des propriétés....44

3.2. Diviseurs, multiples et nombres premiers....46
- a. Le partage équitable....46
- A. Diviseurs et Multiples : Une relation de famille....46

FIGURE 15 : RÉF. IMG (7645-6497-9545)....48

Visualisation des diviseurs du nombre 12 avec des mangues du Kwilu....48
- B. Les Nombres Premiers : Les indivisibles....48

FIGURE 16 : RÉF. IMG (0124-5247-2305)....50

Le Crible d'Ératosthène pour trouver les nombres premiers jusqu'à 50....50
- Scénarios et Exercices....50

3.3. Critères de divisibilité....52
- a. Le partage équitable....52
- A. Divisibilité par 2, 5 et 10 : Le secret du dernier chiffre....52

FIGURE 17 : RÉF. IMG (4901-0424-9757)....54

Le dernier chiffre, la clé de la divisibilité par 2, 5 et 10....54
- B. Divisibilité par 3 et 9 : La somme des chiffres....54

FIGURE 18 : RÉF. IMG (9174-2800-5929)....56

Additionner les chiffres pour tester la divisibilité par 3 et par 9....56
- b. Scénarios et exercices....56

PARTIE 2 : NOMBRES ENTIERS RELATIFS, DÉCIMAUX ET RATIONNELS....59

a. Au-delà du zéro....59

b. La grande famille des entiers relatifs....59

c. La précision de la virgule....59

d. Le partage juste : les rationnels....59

CHAPITRE 4 : L'ENSEMBLE Z DES ENTIERS RELATIFS....60

4.1. Construction et découverte de Z....60
- a. Le besoin d'aller au-delà du comptage....60
- A. L'insuffisance des nombres naturels ()....60
- B. L'introduction de l'ensemble des entiers relatifs ()....60

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

FIGURE 19 : RÉF. IMG (7547-0509-5366) **62**

La droite numérique des entiers relatifs avec le zéro au centre 62

FIGURE 20 : RÉF. IMG (5236-1944-6630) **63**

Un thermomètre montrant des températures positives et négatives 63

- b. Scénarios et Exercices 63

4.2. Valeur absolue, opposés et ordre dans Z 65

- a. Le sens caché des nombres négatifs 65
- A. La valeur absolue : une distance à zéro 65

FIGURE 21 : RÉF. IMG (2178-5656-1243) **66**

Droite numérique illustrant la notion de valeur absolue et d'opposés 66

- B. Les opposés : le miroir sur la droite numérique 66
- C. L'ordre dans Z : qui est le plus grand ? 66

FIGURE 22 : RÉF. IMG (3910-3410-5694) **68**

Comparaison de deux nombres négatifs sur l'axe des entiers relatifs 68

- Scénarios et Exercices 68
- Une histoire de sacs de maïs à Mbuji-Mayi 68

4.3. Repérage dans le plan cartésien 70

- a. L'invention d'un philosophe 70
- A. Les axes et les coordonnées 70

FIGURE 23 : RÉF. IMG (6594-8832-7981) **72**

Un plan cartésien simple avec ses deux axes et son origine 72

- B. Placer un point dans le plan 72

FIGURE 24 : RÉF. IMG (5636-7661-0063) **75**

Placement du point P(-2, 3) dans un plan cartésien 75

- Scénarios et Exercices 75
- L'arpenteur de Kikwit 75

CHAPITRE 5 : OPÉRATIONS DANS Z **78**

5.1. Addition, soustraction et suppression des parenthèses 78

- a. Une histoire de température à Lubumbashi 78
- A. Additionner deux nombres entiers 78

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

FIGURE 25 : RÉF. IMG (6079-3708-8345) **80**

La droite numérique illustrant les additions dans l'ensemble Z 80

- B. Soustraire un nombre entier 80
- C. Supprimer les parenthèses 80

FIGURE 26 : RÉF. IMG (3513-6831-4934) **82**

Le signe devant la parenthèse change ou conserve les signes intérieurs 82

- L'anecdote de Papa Welo, le planteur de café du Kwilu 82

5.2. Multiplication et division dans Z 84

- a. Le secret des dettes et des gains 84
- A. La multiplication dans Z et la règle des signes 84

FIGURE 27 : RÉF. IMG (1374-5661-4608) **86**

Diagramme simple illustrant la règle des signes pour la multiplication 86

- B. La division dans Z 86

5.3. Résolution de problèmes additifs et multiplicatifs 89

- a. Le problème comme un récit mathématique 89
- A. Identifier l'opération correcte 89
- B. Poser l'équation et la résoudre 90

FIGURE 28 : RÉF. IMG (0260-1854-4928) **91**

Représentation concrète des dettes et des gains financiers avec des sacs 91

- Scénarios et Exercices 91

CHAPITRE 6 : PUISSANCES DANS Z ET NOMBRES DÉCIMAUX **94**

6.1. Exponentiation dans Z (base négative) 94

- a. Une règle qui change tout 94
- A. Anatomie d'une puissance négative 94

FIGURE 29 : RÉF. IMG (1621-1355-8305) **96**

Schéma montrant le calcul de $(-2)^3$ et $(-2)^4$ avec des flèches 96

- B. La règle de la parité de l'exposant 96

FIGURE 30 : RÉF. IMG (4630-2255-1781) **98**

Tableau comparatif des puissances d'un nombre négatif avec exposant pair/impair 98

- C. Attention à la position des parenthèses 98

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

6.2. Nombres décimaux et leurs opérations....100
- a. La virgule, une invention pas si vieille....100
- A. Anatomie d'un Nombre Décimal....100

FIGURE 31 : RÉF. IMG (8518-4148-4840)....101

Décomposition d'un nombre décimal avec ses parties entière et décimale....101
- B. Addition et Soustraction : L'Alignement est la clé....101

FIGURE 32 : RÉF. IMG (1814-9119-6405)....103

Alignement correct des virgules pour l'addition et la soustraction décimale....103
- C. Multiplication et Division : Deux Logiques Différentes....103

6.3. Problèmes de commerce et d'environnement avec les décimaux....105
- a. Une monnaie pour le commerce....105
- A. Les décimaux dans les échanges commerciaux....105

FIGURE 33 : RÉF. IMG (9867-1856-3261)....107

Marchande de légumes à Mbandaka pesant des produits avec une balance....107
- B. Les décimaux pour décrire notre environnement....107
- C. Scénarios et Exercices....108

CHAPITRE 7 : FRACTIONS ET NOMBRES RATIONNELS....110

7.1. Fractions : simplification, comparaison et ordre....110
- a. L'héritage égyptien du partage....110
- A. Simplifier une fraction....110
- B. Comparer des fractions....111

FIGURE 34 : RÉF. IMG (1518-3362-6257)....113

Comparaison de deux fractions avec des barres de chocolat différentes....113
- C. Ordonner des fractions....113

7.2. Opérations sur les fractions (addition, soustraction, produit, quotient)....117
- a. L'accroche du partage....117
- A. Addition et Soustraction....117

FIGURE 35 : RÉF. IMG (4158-4928-2772)....119

Addition de fractions avec des parts de gâteau de tailles différentes....119
- B. Multiplication et Division....119

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

FIGURE 36 : RÉF. IMG (3210-5684-2650) **121**

Comment la division de fractions explique le remplissage d'un récipient 121

- C. Scénarios et Exercices 121

7.3. Problèmes complexes sur les fractions 123

- a. Le secret du partage 123
- A. La méthode des étapes : décomposer le problème 123

FIGURE 37 : RÉF. IMG (3212-5942-5525) **126**

Visualisation d'un partage de terrain agricole à Mbandaka, Équateur 126

- B. Le piège de la "fraction du reste" 126

PARTIE 3 : CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS ET GESTION DE DONNÉES **131**

a. Le secret des lettres en calcul 131

b. L'équation, une balance parfaite 131

c. Organiser l'information pour la comprendre 131

d. Des outils pour décoder le monde réel 131

CHAPITRE 8 : PROPORTIONNALITÉ ET POURCENTAGES **132**

8.1. Rapports, proportions et pourcentages 132

- a. L'analogie de la recette 132
- A. Le rapport, une simple comparaison 132
- B. La proportion, l'égalité des rapports 132
- C. Le pourcentage, le rapport sur 100 133

FIGURE 38 : RÉF. IMG (9170-7412-4584) **134**

L'icône de batterie d'un téléphone portable affichant différents pourcentages 134

- D. Scénarios et Exercices 134

8.2. Échelles, plans et cartes 136

- a. Une question de taille 136
- A. Définition et lecture d'une échelle 136

FIGURE 39 : RÉF. IMG (6106-7719-8721) **137**

Carte de la ville de Matadi avec son échelle graphique 137

- B. Calculer avec une échelle 137

FIGURE 40 : RÉF. IMG (0454-6452-1162) **139**

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

Plan d'une parcelle à Mbandaka et son échelle numérique....139
- b. Le secret des géomètres de Mbujimayi....139

8.3. Problèmes de proportionnalité inverse et composée....141
- a. L'erreur du chantier de Mbandaka....141
- A. La proportionnalité inverse : moins, c'est plus !....141

FIGURE 41 : RÉF. IMG (0846-2942-4726)....143

Des ouvriers construisant un mur en briques sous le soleil....143
- B. La proportionnalité composée : le grand mélange....143

CHAPITRE 9 : CALCUL LITTÉRAL ET FACTORISATION....147

9.1. Expressions littérales et calcul de leur valeur numérique....147
- a. L'énigme du marché de Matadi....147
- A. Définition : La lettre, ce nombre caché....147
- B. Méthode : Remplacer pour calculer....148

FIGURE 42 : RÉF. IMG (4931-9818-8787)....149

Du calcul littéral au résultat concret : le champ de maïs....149
- Scénarios et Exercices....149
- a. L'anecdote du menuisier de Kisangani....149

9.2. Opérations sur les polynômes et développement....151
- a. Le calcul, une histoire de famille....151
- A. Addition et Soustraction : le regroupement familial....151

FIGURE 43 : RÉF. IMG (1748-3231-7517)....153

Visualisation de l'addition de polynômes avec des boîtes colorées....153
- B. La Distributivité Simple : la multiplication généreuse....153

FIGURE 44 : RÉF. IMG (3769-7448-5374)....155

Le principe de la distributivité illustré par des sacs de maïs....155
- C. La Double Distributivité....155

9.3. Factorisation et produits remarquables....157
- a. Le rangement mathématique....157
- A. La factorisation par mise en évidence....157

FIGURE 45 : RÉF. IMG (8721-3988-1077)....158

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

Un tas de bananes et de plantains groupés par régime.....158
- B. Les produits remarquables.....158

CHAPITRE 10 : ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.....161

10.1. Notions et principes d'équivalence d'une équation.....161
- a. Le secret de la balance.....161
- A. L'ANATOMIE D'UNE ÉQUATION.....161
- B. LES PRINCIPES D'ÉQUIVALENCE.....162

FIGURE 46 : RÉF. IMG (3517-6831-6548).....163

Les deux principes d'équivalence appliqués à une balance en équilibre.....163
- SCÉNARIOS ET EXERCICES.....163

10.2. Résolution technique d'équations dans Z, D et Q.....165
- a. L'équilibre du savoir.....165
- A. Le principe d'équivalence : la règle de la balance.....165

FIGURE 47 : RÉF. IMG (6963-4307-9702).....168

Une balance à plateaux parfaitement équilibrée représentant une équation math.....168
- B. La méthode systématique en quatre étapes.....168

FIGURE 48 : RÉF. IMG (8179-7752-5141).....171

Un schéma fléché montrant les étapes de la résolution d'une équation.....171
- C. Scénarios et Exercices.....171

10.3. Mise en équation et résolution de problèmes thématiques.....173
- a. L'algèbre cachée du quotidien.....173
- A. De la phrase au calcul : l'art de la traduction.....173

FIGURE 49 : RÉF. IMG (3128-1250-6637).....175

Schéma montrant la traduction d'un problème en langage mathématique.....175
- B. Les quatre étapes de la résolution.....175

FIGURE 50 : RÉF. IMG (7958-0301-8684).....176

Les quatre étapes clés pour résoudre un problème par l'algèbre.....176
- b. Scénarios et exercices.....176

ANNEXES.....179

Bibliographie.....179

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

- A. Fondements Historiques et Épistémologiques.....179
- B. Notions Didactiques Fondamentales.....180
- C. Références Pédagogiques et Ouvrages Majeurs.....181

Grilles d'évaluation et Corrigés types.....181

- A. Principes Fondamentaux de l'Évaluation en Algèbre (7ème Année).....181
- B. Construction d'une Grille d'Évaluation Détaillée.....183
- C. Rédaction et Utilisation des Corrigés Types.....184

Lexique mathématique.....185

- A. Ensembles de Nombres et Notations.....185
- B. Le Calcul Algébrique.....186
- C. Propriétés des Opérations dans et.....186
- D. Équations du Premier Degré.....187
- E. Puissances à exposants entiers.....188

PRÉLIMINAIRES

Note pédagogique à l'attention de l'enseignant

1. La transition de l'arithmétique à l'algèbre

Le passage de l'arithmétique à l'algèbre constitue une rupture conceptuelle majeure pour l'élève. Il s'agit de le guider d'un univers de calculs sur des nombres spécifiques vers la manipulation de structures et de relations générales. L'introduction du calcul littéral formalise ce basculement. La lettre, ou variable, devient l'outil principal de cette généralisation. Cette abstraction requiert un accompagnement didactique constant pour s'assurer de sa correcte appropriation.

2. La construction du sens des variables

La variable algébrique possède plusieurs statuts. Son enseignement doit en refléter la richesse. Elle est tour à tour : - une inconnue à déterminer dans une équation (ex: $x+5=8$) ; - une variable décrivant une relation (ex: $y=2x+1$) ; - un paramètre ou un nombre généralisé pour énoncer une propriété (ex: $a+b=b+a$).

L'installation progressive de ces concepts prévient de nombreuses difficultés futures liées à une vision univoque et réductrice de la lettre en mathématiques.

3. La primauté du raisonnement sur la technique

Une focalisation excessive sur les algorithmes de calcul nuit à la compréhension profonde. La justification des étapes de résolution d'une équation prime sur la mémorisation mécanique de procédures. La maîtrise des propriétés des opérations (associativité, commutativité, distributivité) est le fondement de la manipulation symbolique. L'enseignant favorise donc les activités qui amènent l'élève à expliciter son raisonnement et à valider ses stratégies.

4. L'exploitation de l'erreur comme outil didactique

Les erreurs des élèves sont des indicateurs précieux des obstacles cognitifs rencontrés. Leur analyse systématique permet un ajustement précis de l'action pédagogique. Une erreur n'est pas une faute mais la manifestation d'une logique alternative, souvent issue d'une généralisation abusive des règles

arithmétiques. L'objectif est de déconstruire cette logique avec l'élève pour la rectifier.

Objectifs généraux du cours

1. Consolidation de la pensée symbolique

1.1. Passage de l'arithmétique à l'algèbre

L'objectif fondamental est d'assurer la transition cognitive de l'élève, de la manipulation des nombres concrets (arithmétique) à la manipulation des symboles (algèbre). L'enseignement doit amener l'élève à conceptualiser la lettre (la variable) non plus comme une simple abréviation, mais comme un véritable objet mathématique représentant une quantité généralisable ou inconnue.

1.2. Maîtrise des expressions littérales

Consécutivement, l'élève doit acquérir une aisance technique dans la manipulation des expressions littérales. La compétence visée est la capacité à appliquer les règles de calcul pour réduire, développer et factoriser des expressions algébriques simples. Cette maîtrise procédurale est le socle de toute compétence algébrique future.

2. Développement des compétences opératoires

2.1. Opérations sur les monômes et polynômes

Ce cours établit les fondations du calcul polynomial. L'élève apprendra à exécuter avec rigueur les quatre opérations de base sur des monômes, puis sur des polynômes de degré simple. Une attention pédagogique particulière sera portée à la gestion des signes et à l'application correcte de la distributivité.

2.2. Résolution d'équations du premier degré

L'aptitude à résoudre une équation du premier degré à une inconnue du type $ax+b=c$ constitue un objectif central. Le processus de résolution doit être présenté comme une application directe des principes d'équivalence, formant l'élève à isoler l'inconnue par une séquence d'opérations logiques et justifiées.

3. Structuration du raisonnement déductif

3.1. Modélisation de problèmes concrets

L'objectif ultime est de rendre l'élève capable de traduire une situation problème, issue d'un contexte simple, en une équation mathématique. Cette compétence de modélisation démontre l'utilité pratique de l'algèbre et ancre le savoir dans une logique de résolution de problèmes.

Méthodologie et approche par compétences

1.1. Articulation entre savoirs et situations-problèmes

La démarche pédagogique privilégie la mobilisation des connaissances. Elle vise la construction d'un savoir-agir par l'élève, dépassant la simple restitution de formules. Chaque concept théorique est directement arrimé à une catégorie de problèmes concrets qu'il permet de résoudre. La maîtrise d'une règle ou d'une propriété algébrique se mesure ainsi à son efficacité d'utilisation dans un contexte précis, évaluable et reproductible.

1.2. Structure ternaire de la leçon

La séquence d'apprentissage observe une progression systématique en trois temps. - **Temps 1 : L'énoncé formel.** La règle, la propriété ou la définition algébrique est établie avec une rigueur mathématique. - **Temps 2 : L'application guidée.** Des exemples résolus et commentés illustrent immédiatement le mécanisme opératoire. - **Temps 3 : Le transfert en contexte.** Des scénarios contextualisés ancrent l'outil mathématique dans des situations plausibles, allant de la gestion d'un petit commerce à Mbandaka à la planification d'un partage de récolte au Kasaï.

1.3. Finalité : la compétence mathématique opérationnelle

L'objectif terminal est de former un praticien de l'algèbre, non un simple réceptacle de savoirs. Un élève algébriquement compétent est celui qui, face à une situation-problème, identifie l'outil mathématique pertinent, l'applique correctement et interprète le résultat obtenu. Cette compétence est validée par sa capacité à modéliser un énoncé du quotidien en une expression ou une équation, puis à la résoudre de manière autonome et logique.

Bibliographie sélective et sources

1. Fondements Didactiques et Pédagogiques

La conception de cet ouvrage intègre les principes de la didactique des mathématiques contemporaine. Une attention particulière est accordée à l'approche par situations-problèmes, favorisant la construction du savoir par l'élève. Cette méthodologie vise à aligner la pratique enseignante sur les orientations du Programme National de Mathématiques de l'Éducation de Base. Les travaux sur l'apprentissage actif et la résolution de problèmes ont guidé la structuration progressive des chapitres et des exercices d'application.

2. Références Scientifiques en Algèbre

La validation scientifique des notions algébriques présentées émane de la consultation d'ouvrages de référence du premier cycle universitaire. Des manuels classiques d'algèbre générale et de théorie élémentaire des ensembles constituent le socle terminologique et conceptuel de l'ouvrage. Ce choix assure une rigueur mathématique irréprochable. Il garantit également une transition cohérente pour les élèves se destinant à des études scientifiques supérieures après le cycle de base.

3. Conformité au Programme National

Chaque chapitre et chaque exercice ont été élaborés en stricte conformité avec le référentiel de compétences de l'EPST pour la 7ème année de l'Éducation de Base. Les documents cadres et les guides pédagogiques officiels publiés par la Direction des Programmes Scolaires et Matériel Didactique (DIPROMAD) ont servi de fil conducteur. L'objectif est de fournir à l'enseignant un outil parfaitement aligné sur les attentes institutionnelles et les objectifs de l'évaluation certificative nationale.

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

PARTIE 1 : NOMBRES NATURELS, NUMÉRATION ET ARITHMÉTIQUE

a. L'outil le plus ancien du monde

Avant les calculatrices et les ordinateurs, il y avait les doigts, les cailloux, les bâtons. L'être humain a toujours eu besoin de compter. Un éleveur du Kasaï compte ses chèvres, un pêcheur près de Kisangani compte ses poissons. Ces nombres du quotidien sont les nombres naturels ($0,1,2,3\ldots$). Ils sont la première brique de toutes les mathématiques, l'outil le plus simple pour organiser et quantifier le monde réel.

b. Un code pour tout écrire

Avoir des nombres est une chose. Savoir les écrire, surtout les grands nombres, en est une autre. Un commerçant de Lubumbashi ne peut pas dessiner un million de barres pour noter sa recette. La numération est le système qui organise l'écriture des nombres. Notre système, le système décimal, utilise dix chiffres (0 à 9) et la position de chaque chiffre pour représenter toutes les quantités possibles.

c. L'art de faire bouger les nombres

Les nombres ne sont pas des objets figés. L'arithmétique est l'art de les faire interagir. Elle permet d'additionner les sacs de manioc d'un champ dans le Kwilu, de soustraire les dépenses d'une "maman" au marché de Matadi, ou de diviser une récolte entre plusieurs familles. L'addition, la soustraction, la multiplication et la division sont les quatre opérations fondamentales qui animent les nombres et décrivent leurs relations.

d. L'objectif : résoudre les problèmes du quotidien

Cette première partie organise ces trois idées fondamentales. D'abord l'objet : le nombre naturel. Ensuite le langage pour le représenter : la numération. Enfin l'action : l'arithmétique. La maîtrise correcte de ces trois piliers est la clé pour résoudre des problèmes concrets. Calculer une distance, gérer un petit budget, ou planifier une construction simple… tout raisonnement mathématique commence par ces bases solides.

Chapitre 1 : Exponentiation et Polynômes Arithmétiques

1.1. La puissance d'un nombre dans N

a. L'idée derrière la puissance

Pendant que le maître explique au tableau, une seule cellule de bactérie, disons à Boma dans le Kongo Central, peut se diviser en deux. Ces deux nouvelles bactéries se diviseront à leur tour en deux, et ainsi de suite. Ce processus de multiplications répétées est au cœur d'une notion mathématique fondamentale.

Cette opération, bien plus puissante qu'une simple addition, permet de calculer une croissance explosive. L'algèbre lui donne un nom et des règles précises : l'exponentiation. Elle sert à simplifier l'écriture et le calcul de très grands nombres issus de multiplications répétées du même nombre.

A. Définition et Vocabulaire

Une puissance est le résultat de la multiplication répétée d'un même nombre par lui-même. C'est une écriture simplifiée.

Pour écrire "5 multiplié par lui-même 4 fois", on note :

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$$

Cette écriture se lit "cinq exposant quatre" ou "cinq puissance quatre".

- Le nombre 5 est appelé la **base**. C'est le nombre qui est multiplié.
- Le nombre 4 est appelé l'**exposant**. Il indique combien de fois la base est multipliée par elle-même.
- L'ensemble 5^4 est appelé la **puissance**.
- Le résultat du calcul, ici 625, est la valeur de la puissance.

Figure 1 : Réf. IMG (8606-0227-7191)

Anatomie d'une puissance mathématique pour débutants

a. Le schéma central

Un schéma montre l'écriture a^n. Une flèche pointe vers le "a" avec la mention "La base (le nombre qu'on multiplie)". Une autre flèche pointe vers le "n" en haut à droite avec la mention "L'exposant (le nombre de fois)". Une accolade entoure l'ensemble a^n avec la mention "La puissance". Cette image décompose visuellement le concept pour une mémorisation facile et immédiate des trois termes techniques fondamentaux de l'exponentiation.

b. La base, le pilier du calcul

La base est le fondement de l'opération. Dans l'expression 10^3, la base est 10. C'est le nombre qui subit la multiplication répétée. Sans une base claire, le calcul n'a aucun sens. C'est le "quoi" de la multiplication.

c. L'exposant, le chef d'orchestre

L'exposant est le "combien de fois". Il ordonne à la base de se multiplier par elle-même un certain nombre de fois. Pour 10^3, l'exposant 3 commande : "Base 10, multiplie-toi 3 fois par toi-même". L'exposant est donc le compteur de l'opération.

B. Cas particuliers à maîtriser

Certains exposants ont des propriétés fixes, peu importe la base.

- **L'exposant 1** : Tout nombre affecté de l'exposant 1 est égal à lui-même.

$$a^1 = a \quad (\text{Exemple} : 15^1 = 15)$$

- **L'exposant 0** : Tout nombre non nul affecté de l'exposant 0 est égal à 1.

$$a^0 = 1 \quad (\text{pour } a \neq 0, \text{ exemple} : 2024^0 = 1)$$

- **Les puissances de 10** : Elles sont très pratiques. L'exposant indique simplement le nombre de zéros après le 1.

$$10^2 = 100 \quad (2 \text{ zéros})$$

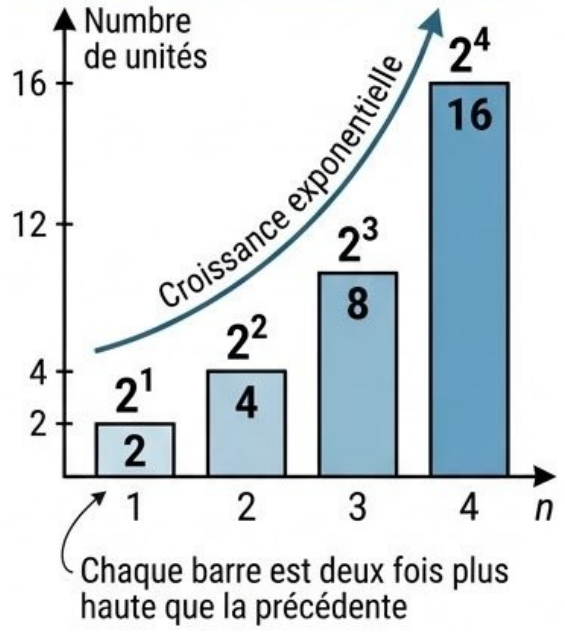
$$10^5 = 100\,000\,(5\,\text{zéros})$$

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

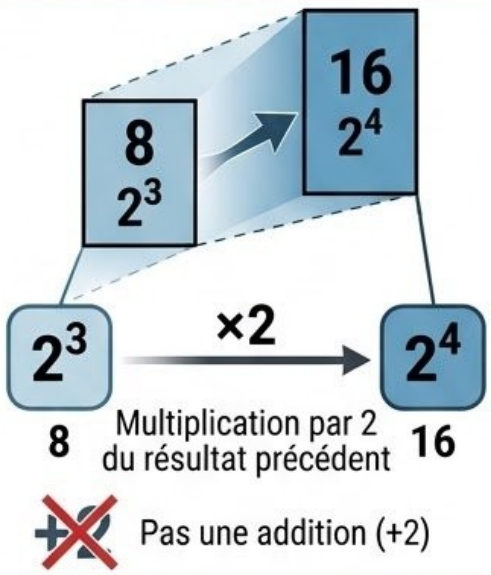
Figure 2 : Réf. IMG (0213-0773-8245)

Croissance visuelle d'une puissance avec la base 2

a. L'escalier de la puissance



b. Le principe de la duplication



Conceptualisation : Duplication

c. Une application concrète

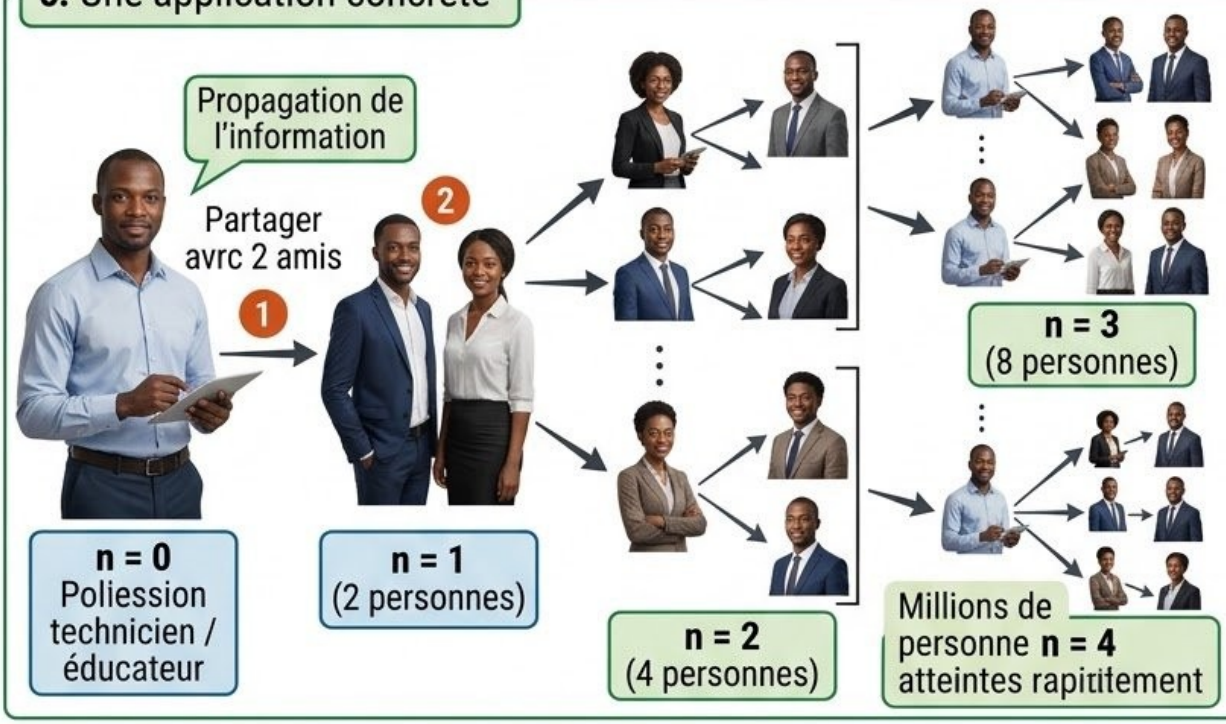


Figure 2 : Réf. IMG (0213-0773-8245)

Croissance visuelle d'une puissance avec la base 2

a. L'escalier de la puissance

L'image est un graphique en barres qui montre la croissance de 2^n. La première barre, 2^1, a une hauteur de 2 unités. La deuxième, 2^2, a une hauteur de 4. La troisième, 2^3, monte à 8, et la quatrième, 2^4, atteint 16. Chaque barre est visiblement deux fois plus haute que la précédente, formant un escalier qui monte de plus en plus vite. C'est la signature visuelle d'une croissance exponentielle.

b. Le principe de la duplication

Ce graphique illustre parfaitement le concept de duplication. Passer de 2^3 à 2^4 ne consiste pas à ajouter 2, mais à multiplier le résultat précédent (8) par 2. C'est cette multiplication qui rend la croissance si rapide.

c. Une application concrète

Cette croissance modélise la propagation d'une information sur un réseau social. Une personne la partage avec deux amis, qui chacun la partagent avec deux autres amis. En très peu d'étapes, des milliers de personnes sont atteintes.

■ ■ ■

C. Scénarios et Exercices

a. Une histoire de chikwangue à Mbandaka

Mama Odette, dans la province de l'Équateur, détient la meilleure recette de chikwangue de la ville. Un jour, elle décide de la partager, mais pas avec n'importe qui. Elle la confie à ses 4 meilleures amies. La semaine suivante, chacune de ces 4 amies, trouvant la recette exceptionnelle, la partage à son tour avec 4 autres personnes de confiance. Le phénomène continue : chaque nouvelle personne qui apprend la recette la partage avec 4 autres la semaine d'après. Au début, seule Mama Odette connaît le secret. - Semaine 1 : 4 nouvelles personnes connaissent la recette (4^1). - Semaine 2 : 16 nouvelles personnes l'apprennent ($4 \times 4 = 4^2$). - Semaine 3 : 64 nouvelles personnes sont initiées ($16 \times 4 = 4^3$). La puissance de 4 décrit la vitesse à laquelle le secret de la chikwangue se répand dans Mbandaka.

Exercice 1 : Le stock de poissons de l'oncle Amani

Énoncé : L'oncle Amani, pêcheur près de Kisangani, commence la semaine avec un stock de 5 gros poissons fumés. Grâce à une nouvelle technique de conservation, il parvient à tripler son stock chaque semaine. Calculez le nombre de poissons qu'il aura après 3 semaines.

Résolution pas-à-pas :

1. **Étape 1 : Identifier les données** Le stock de départ est de 5 poissons. L'opération est une multiplication par 3 (tripler) qui se répète 3 fois (pendant 3 semaines).
2. **Étape 2 : Modéliser le problème avec une puissance** Le stock est multiplié par 3, puis le résultat est encore multiplié par 3, et cela une troisième fois. On a donc $3 \times 3 \times 3$, ce qui s'écrit 3^3. Le stock de départ est 5. Le calcul final est 5×3^3.
3. **Étape 3 : Calculer la puissance** On calcule d'abord la valeur de la puissance.

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 9 \times 3 = 27$$

4. **Étape 4 : Calculer le résultat final** On multiplie le stock de départ par le résultat de la puissance.

$$5 \times 27 = 135$$

Après 3 semaines, l'oncle Amani aura 135 poissons.

Exercice 2 : La plantation de caféiers au Kasaï

Énoncé : Un agriculteur du Kasaï-Oriental souhaite planter ses caféiers en formant un carré parfait. Il décide de planter une rangée de 12 caféiers, et de faire 12 rangées identiques. Exprime le nombre total de caféiers en utilisant une puissance, puis calcule ce nombre.

Résolution pas-à-pas :

1. **Étape 1 : Comprendre la disposition en carré** Un carré de 12 par 12 signifie qu'il y a 12 lignes et 12 colonnes. Pour trouver le total, on multiplie le nombre de lignes par le nombre de colonnes.
2. **Étape 2 : Écrire l'opération sous forme de puissance** L'opération est 12×12. C'est le nombre 12 multiplié par lui-même. L'écriture en puissance est 12^2.

3. **Étape 3 : Calculer la valeur de la puissance** On effectue le calcul de 12^2.

$$12^2 = 12 \times 12 = 144$$

L'agriculteur plantera un total de 144 caféiers.

1.2. Écriture polynomiale et valeur numérique d'un nombre

a. L'énigme des chiffres

Même si nous écrivons le nombre 253 d'un seul trait, chaque chiffre à l'intérieur possède une valeur secrète, cachée par sa position. Le chiffre 2 ne vaut pas simplement "deux", et le 3 ne vaut pas simplement "trois". Chaque chiffre a une importance qui dépend de son rang.

Cette valeur dépend de sa place. Un chiffre placé à gauche a plus de "poids", un peu comme un grand frère dans une famille de la Province Orientale. L'algèbre nous donne un outil pour révéler cette structure invisible. Cet outil est l'écriture polynomiale arithmétique.

A. L'écriture polynomiale d'un nombre

Un nombre naturel est une somme déguisée. Son écriture polynomiale est la version non déguisée de ce nombre. Elle décompose le nombre en une addition de termes, où chaque terme montre la vraie valeur d'un chiffre.

Prenons le nombre 4 783. - Le chiffre 4 représente les milliers. - Le chiffre 7 représente les centaines. - Le chiffre 8 représente les dizaines. - Le chiffre 3 représente les unités.

Cela se traduit par une somme :

$$4\,783 = 4 \times 1000 + 7 \times 100 + 8 \times 10 + 3 \times 1$$

En utilisant les puissances de 10, l'écriture devient plus rigoureuse. L'écriture polynomiale de 4 783 est :

$$4\,783 = \left(4 \times 10^3\right) + \left(7 \times 10^2\right) + \left(8 \times 10^1\right) + \left(3 \times 10^0\right)$$

Un point essentiel est que tout nombre (sauf zéro) élevé à la puissance 0 est égal à 1. Ainsi, $10^0 = 1$.

Figure 3 : Réf. IMG (4925-2439-5619)

Décomposition visuelle d'un nombre en puissances de dix

a. Le nombre en blocs

L'illustration montre le nombre 243. Il est représenté par des blocs de différentes tailles. On observe deux grands carrés (centaines), quatre barres (dizaines) et trois petits cubes (unités). Chaque type de bloc correspond à une puissance de dix.

b. La valeur de chaque bloc

Les grands carrés symbolisent les centaines (10^2). Les barres symbolisent les dizaines (10^1). Les petits cubes symbolisent les unités (10^0). La quantité de chaque type de bloc correspond au chiffre à cette position.

c. L'équation polynomiale

Cette représentation visuelle traduit directement l'écriture polynomiale. Deux centaines, quatre dizaines et trois unités donnent l'équation : $(2\times10^2)+(4\times10^1)+(3\times10^0)$. La forme polynomiale révèle la structure interne du nombre.

B. La valeur numérique d'un nombre

La valeur numérique d'une écriture polynomiale est le nombre lui-même, sous sa forme habituelle. C'est le résultat final du calcul de la somme.

Considérons l'écriture polynomiale suivante :

$$(6\times10^4)+(0\times10^3)+(5\times10^2)+(1\times10^1)+(9\times10^0)$$

Pour trouver sa valeur numérique, on calcule chaque terme : - $6\times10^4=60\,000$ - $0\times10^3=0$ - $5\times10^2=500$ - $1\times10^1=10$ - $9\times10^0=9$

Ensuite, on additionne tous ces résultats :

$$60\,000+0+500+10+9=60\,519$$

La valeur numérique est 60 519.

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

Figure 4 : Réf. IMG (6247-7858-4512)

La valeur de position des chiffres dans les prix au marché

a. L'étiquette de prix

Un vendeur au marché de Gambela affiche le prix d'un sac de riz : 27 500 FC. Chaque chiffre sur cette étiquette n'a pas la même importance. Le '2' ne représente pas deux francs, mais bien vingt mille francs.

b. Le poids de chaque chiffre

Le chiffre '2' est à la position des dizaines de milliers (10^4). Le '7' est à la position des milliers (10^3). Le '5' est à celle des centaines (10^2). Leur position détermine leur contribution réelle à la valeur totale du prix.

c. Du polynôme à la valeur

Le prix peut être décomposé en $(2\times10^4)+(7\times10^3)+(5\times10^2)$. En calculant cette somme, on retrouve la valeur numérique affichée sur l'étiquette. C'est le montant final que le client paiera.

■ ■ ■

Scénarios et Exercices

Anecdote : Le comptage au port de Matadi

Fiston aide son oncle, transitaire au port de Matadi dans le Kongo Central. Ils doivent faire l'inventaire d'une cargaison de cahiers. Les cahiers sont emballés de plusieurs manières : par palettes de 1000, par grands cartons de 100, et par paquets de 10. Après une longue journée, Fiston annonce le total. "Oncle, nous avons 3 palettes, 8 grands cartons, 0 paquet, et 5 cahiers seuls !"

Son oncle sourit. Il sait que Fiston vient de lui donner, sans le savoir, une écriture polynomiale. Il prend son carnet et note : $(3\times10^3)+(8\times10^2)+(0\times10^1)+(5\times10^0)$. Le total est donc de 3805 cahiers. L'organisation du stock suit la logique des puissances de dix.

Exercice 1 : La distance entre deux villes

Énoncé : La route nationale qui relie Kananga à Mbuji-Mayi mesure environ 153 kilomètres. Écrire la distance "153" sous sa forme polynomiale.

Résolution pas-à-pas :

1. **Étape 1 : Identifier les chiffres et leurs positions** Le nombre est 153.
   - 1 est le chiffre des centaines.
   - 5 est le chiffre des dizaines.
   - 3 est le chiffre des unités.
2. **Étape 2 : Associer chaque chiffre à sa puissance de 10**
   - Pour les centaines (position 2) : 1×10^2
   - Pour les dizaines (position 1) : 5×10^1
   - Pour les unités (position 0) : 3×10^0
3. **Étape 3 : Assembler l'écriture polynomiale** La forme polynomiale de 153 est la somme de ces termes :

$$153 = (1 \times 10^2) + (5 \times 10^1) + (3 \times 10^0)$$

Exercice 2 : La récolte de maïs dans le Kwilu

Énoncé : Une coopérative agricole de la province du Kwilu a produit une quantité de sacs de maïs exprimée par le polynôme arithmétique suivant : $(9 \times 10^3) + (4 \times 10^2) + (7 \times 10^0)$. Quelle est la valeur numérique de cette production ?

Résolution pas-à-pas :

1. **Étape 1 : Calculer la valeur de chaque terme du polynôme**
   - $9 \times 10^3 = 9 \times 1000 = 9000$
   - $4 \times 10^2 = 4 \times 100 = 400$
   - $7 \times 10^0 = 7 \times 1 = 7$
2. **Étape 2 : Additionner les résultats obtenus** Il suffit de sommer les valeurs de chaque terme pour trouver le nombre total.

$$9000 + 400 + 7 = 9407$$

3. **Étape 3 : Conclure avec la valeur numérique** La valeur numérique de l'écriture polynomiale est 9407. La coopérative a donc produit 9407 sacs de maïs.

1.3. Applications pratiques de l'exponentiation

a. L'effet boule de neige

Lorsque Papa Mbuta raconte une histoire au marché de Mbandaka, deux personnes l'écoutent. Chacune de ces deux personnes la raconte à deux autres personnes. Très vite, l'histoire se propage. Cette multiplication rapide est une image de la puissance, aussi appelée exponentiation. Elle décrit comment une quantité grandit en se multipliant par elle-même.

L'exponentiation est partout : en biologie pour la division des cellules, en informatique pour la taille des fichiers, et même en finance pour calculer les intérêts. C'est un outil mathématique puissant pour décrire les très grands nombres de manière simple et concise.

A. L'exponentiation en géométrie : Aires et Volumes

Calculer l'aire d'un carré ou le volume d'un cube utilise directement les puissances. La puissance 2 est souvent appelée "carré" et la puissance 3 est appelée "cube" pour cette raison géométrique.

Un carré de côté c possède une aire égale à $c \times c$, qui se note c^2. De la même manière, un cube d'arête a possède un volume égal à $a \times a \times a$, qui se note a^3. Un champ carré de 10 mètres de côté près de Kananga aura donc une aire de $10^2 = 100$ mètres carrés.

Figure 5 : Réf. IMG (2939-4850-9585)

Représentation géométrique de la puissance 2 (carré) et 3 (cube)

a. Le carré, image de la puissance deux

Un carré dont le côté mesure 3 unités contient $3 \times 3 = 9$ petits carrés unitaires. L'aire est donc 3^2. Cette visualisation aide à comprendre pourquoi on parle de "trois au carré". L'exposant 2 correspond aux deux dimensions de la surface : la longueur et la largeur. L'opération est une multiplication de la mesure du côté par elle-même.

b. Le cube, image de la puissance trois

Un cube dont l'arête mesure 2 unités est composé de $2 \times 2 \times 2 = 8$ petits cubes unitaires. Le volume est 2^3, ou "deux au cube". L'exposant 3 correspond aux trois dimensions de l'espace : longueur, largeur et hauteur. Le calcul du volume est une multiplication de la mesure de l'arête par elle-même, trois fois.

c. Au-delà des trois dimensions

Même si on ne peut pas les dessiner facilement, les mathématiciens utilisent des puissances plus élevées comme x^4 ou x^5. Elles représentent des "hypercubes" dans des dimensions supérieures. L'idée reste la même : une quantité est multipliée par elle-même un certain nombre de fois. L'exponentiation est donc un concept qui va au-delà de la géométrie visible.

B. Écrire les grands nombres : la notation scientifique

Certaines quantités, comme le nombre de grains de sable sur une plage de Moanda ou la distance de la Terre à la Lune, sont trop longues à écrire avec tous leurs zéros. La notation scientifique est une méthode qui simplifie cette écriture en utilisant les puissances de 10.

Le principe est de présenter un nombre sous la forme d'un produit. Ce produit contient un chiffre (entre 1 et 10) et une puissance de 10. Par exemple, la distance Terre-Soleil est d'environ 150 000 000 km. En notation scientifique, cela devient $1,5 \times 10^8$ km. C'est plus court et plus facile à manipuler.