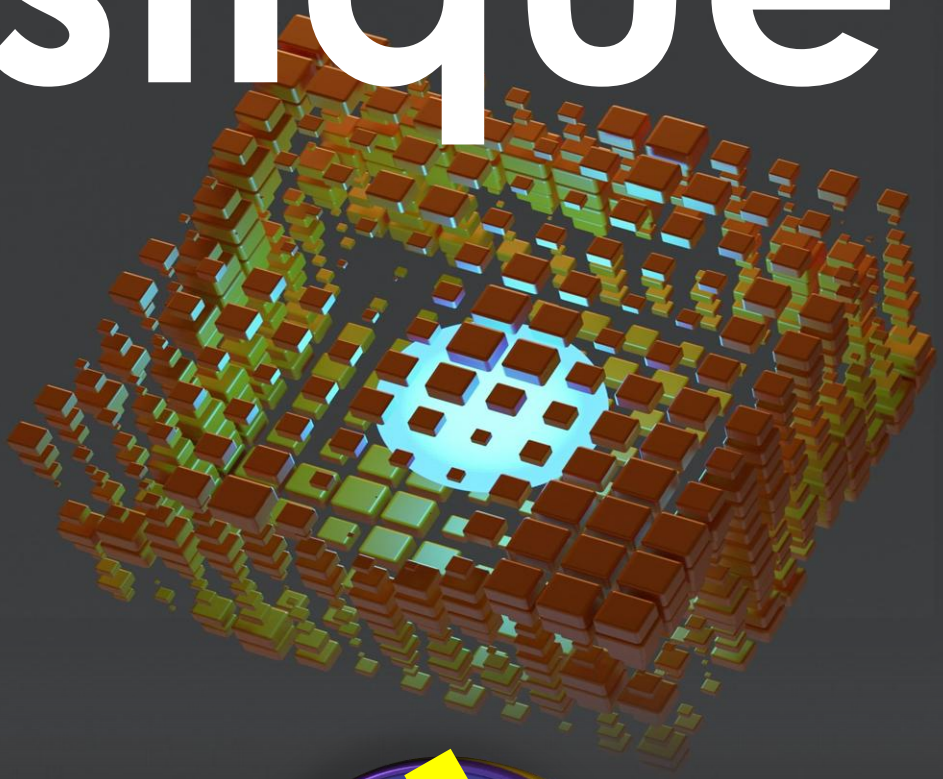
Stat istique



CONFORME AU PROGRAMME NATIONAL

3è Année

EDITION 2025

Options humanités

SCIENTIFIQUES



TABLE DES MATIÈRES

PRÉLIMINAIRES **1**

Note Pédagogique et Objectifs du Cours 1

- 1. Approche Pédagogique 1
- 2. Objectifs d'Apprentissage 1

Profil d'Entrée 2

- 1. Socle Algébrique et Analytique 2
- 2. Maîtrise des Outils de Représentation 2
- 3. Raisonnement Logico-Déductif 2

Compétences Visées 2

- 1. Maîtrise des Outils Conceptuels et Opératoires 3
- 2. Développement des Aptitudes Analytiques 3
- 3. Capacité de Synthèse et de Communication 3

PARTIE 1 : FONDEMENTS DU CALCUL DES PROBABILITÉS **4**

a. Quantifier l'incertitude 4

b. L'origine ludique d'une science rigoureuse 4

c. Le vocabulaire de l'aléatoire 4

d. Un outil essentiel pour l'option scientifique 4

CHAPITRE 1 : ANALYSE COMBINATOIRE ET DÉNOMBREMENT **5**

1.1. Principes Fondamentaux du Dénombrement 5

- a. Le dénombrement, une sagesse ancestrale 5
- A. Le Principe Multiplicatif (ou Principe du Produit) 5
- B. Le Principe Additif (ou Principe de la Somme) 5

FIGURE 1 : RÉF. IMG (7556-2923-1591) **8**

Arbre des possibilités pour un trajet simple de trois étapes 8

- C. La distinction cruciale : "ET" contre "OU" 8

1.2. Arrangements et Permutations 10

- a. L'ordre, ce détail qui change tout 10
- A. L'Arrangement : quand l'ordre compte 11
- B. La Permutation : l'arrangement total 11

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

- SCÉNARIOS ET EXERCICES....12

1.3. Combinaisons et Coefficients Binomiaux....14
- a. Le problème du choix sans ordre....14
- A. Définition et Formule de la Combinaison....14
- B. Coefficients Binomiaux et Triangle de Pascal....15

FIGURE 2 : RÉF. IMG (0236-2146-3344)....17

Structure visuelle du Triangle de Pascal et ses propriétés fondamentales....17
- SCÉNARIOS ET EXERCICES....17

1.4. Formule du Binôme de Newton....19
- a. Du calcul simple au développement complexe....19
- A. Définition et Formule Générale....20
- B. Le Triangle de Pascal comme outil visuel....20

FIGURE 3 : RÉF. IMG (5726-4341-1211)....21

Le Triangle de Pascal et sa relation avec les coefficients binomiaux....21
- C. Application Directe : Développement de....21

CHAPITRE 2 : ESPACES DE PROBABILITÉ ET ÉVÉNEMENTS....24

2.1. Expériences Aléatoires et Univers....24
- a. Le pari de l'incertitude....24
- A. Définir l'Expérience Aléatoire....24
- B. Construire l'Univers des Possibles (Ω)....24

FIGURE 4 : RÉF. IMG (6873-3902-4897)....26

L'univers des possibles (Ω) pour le lancer d'un dé à six faces....26
- C. Identifier un Événement....26

FIGURE 5 : RÉF. IMG (2529-8371-3483)....28

Sélectionner un fruit dans un panier : un événement aléatoire concret....28
- L'anecdote du pêcheur de Mbandaka....28
- SCÉNARIOS ET EXERCICES....29

2.2. Algèbre des Événements....30
- a. La grammaire de l'incertitude....30
- A. Union et Intersection : Le 'OU' et le 'ET'....30
- B. Le Complémentaire : Le 'NON'....31

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

- Scénarios et Exercices....31

2.3. Définition et Axiomes de la Probabilité....32

- a. Du hasard à la mesure....32
- A. La Définition Formelle de la Probabilité....33

FIGURE 6 : RÉF. IMG (6096-7586-0539)....35

Représentation d'un événement A dans l'univers des possibles Ω....35

- B. Les Axiomes de Kolmogorov....35

FIGURE 7 : RÉF. IMG (7200-6761-9412)....38

Illustration de l'axiome d'additivité pour deux événements disjoints....38

- b. Anecdote : La chance du pêcheur du Kwilu....38

2.4. Théorèmes Fondamentaux et Calculs....40

- a. Une erreur commune et ses conséquences....40
- A. Le Théorème de l'Addition (ou Formule de Poincaré)....40
- B. Le Théorème de l'Événement Contraire....41
- SCÉNARIOS ET EXERCICES....41

CHAPITRE 3 : PROBABILITÉ CONDITIONNELLE ET INDÉPENDANCE....44

3.1. Notion de Probabilité Conditionnelle....44

- a. L'information qui change tout....44
- A. Définition Formelle....44

FIGURE 8 : RÉF. IMG (9213-8613-4534)....46

Diagramme de Venn illustrant la probabilité conditionnelle....46

- B. Arbre de Probabilités et Calcul....46

3.2. Arbres de Probabilité et Règles de Multiplication....49

- a. L'intuition derrière la chaîne des événements....49
- A. Visualiser les chemins du possible : L'Arbre de Probabilité....49

FIGURE 9 : RÉF. IMG (0068-6071-5284)....51

Structure d'un arbre de probabilité pour visualiser des événements successifs....51

- B. Calculer la probabilité d'un chemin : La Règle de Multiplication....51

FIGURE 10 : RÉF. IMG (7690-2229-2810)....53

Application de la règle de multiplication sur un chemin de l'arbre....53

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

- b. Scénarios et Exercices.....53

3.3. Indépendance des Événements.....55
- a. L'intuition de la non-influence.....55
- A. Définition et formule de l'indépendance.....55
- B. Indépendance versus Incompatibilité.....56

3.4. Théorème de Bayes et Probabilités Totales.....58
- a. L'art de mettre à jour son jugement.....58
- A. La Formule des Probabilités Totales.....58
- B. Le Théorème de Bayes.....58

FIGURE 11 : RÉF. IMG (0248-9445-6532).....61

Arbre de probabilité illustrant la formule des probabilités totales et Bayes.....61
- C. Scénarios et Exercices.....61

PARTIE 2 : VARIABLES ALÉATOIRES ET PARAMÈTRES STATISTIQUES.....64

a. Traduire le hasard en chiffres.....64

b. Les lois de probabilité.....64

c. Les paramètres de position et de dispersion.....64

d. De l'échantillon à la population.....64

CHAPITRE 4 : GÉNÉRALITÉS SUR LES VARIABLES ALÉATOIRES.....65

4.1. Concept de Variable Aléatoire Réelle.....65
- a. Le hasard mis en chiffres.....65
- A. Définition formelle.....65

FIGURE 12 : RÉF. IMG (9204-3248-2764).....67

Schéma de la fonction "variable aléatoire" d'un univers vers l'ensemble réel.....67
- B. Types de variables aléatoires.....67

FIGURE 13 : RÉF. IMG (4183-0703-0707).....70

Comparaison visuelle entre une distribution discrète et une distribution cont.....70
- SCÉNARIOS ET EXERCICES.....70

4.2. Loi de Probabilité d'une Variable Discrète.....72
- a. L'imprévu du marché de Mbanza-Ngungu.....72
- A. Définition et Tableau de Probabilité.....72

FIGURE 14 : RÉF. IMG (9735-2471-1601) **74**

Tableau de probabilité pour le lancer d'un dé équilibré 74

- B. Propriétés Fondamentales 74

FIGURE 15 : RÉF. IMG (8709-8656-6170) **77**

Diagramme en bâtons illustrant la loi de probabilité d'une variable 77

- Scénarios et Exercices 77

4.3. Fonction de Répartition 79

- a. L'utilité du cumul 79
- A. Définition et Formalisme 80
- B. Propriétés Fondamentales 80

FIGURE 16 : RÉF. IMG (2275-5095-5696) **81**

Graphique d'une fonction de répartition pour une variable aléatoire discrète 81

- C. Utilisation Pratique 81

4.4. Transformation Affine de Variables Aléatoires 84

- a. Une question de mesure 84
- A. Effet sur l'Espérance Mathématique 84
- B. Effet sur la Variance et l'Écart-type 84

FIGURE 17 : RÉF. IMG (6296-4959-0308) **87**

Graphique illustrant une transformation affine sur une distribution de probab 87

- Scénarios et Exercices 87
- Une histoire de conversion de sacs de maïs 87

CHAPITRE 5 : PARAMÈTRES DE POSITION : L'ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE **90**

5.1. Définition et Interprétation de l'Espérance 90

- a. L'intuition du risque et de la moyenne 90
- A. Définition formelle (Variable Aléatoire Discrète) 90

FIGURE 18 : RÉF. IMG (2033-4943-7181) **92**

L'espérance mathématique comme centre de gravité d'une distribution de probab 92

- B. Interprétation pratique : la Loi des Grands Nombres 92

FIGURE 19 : RÉF. IMG (9913-5848-0830) **94**

Convergence de la moyenne empirique vers l'espérance (Loi des grands nombres) 94

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

- b. Scénarios et Exercices.....94

5.2. Propriétés de l'Espérance Mathématique.....97

- a. L'anticipation des gains.....97
- A. Espérance d'une constante.....97
- B. La propriété de linéarité.....97
- C. L'espérance d'une somme.....98
- SCÉNARIOS ET EXERCICES.....98

5.3. Espérance et Prise de Décision.....100

- a. Le pari de la raison.....100
- A. Le critère de la décision rationnelle.....100
- SCÉNARIOS ET EXERCICES.....101

5.4. Centre d'Inertie d'une Distribution.....102

- a. L'analogie de la balançoire.....102
- A. La propriété fondamentale du centre d'inertie.....103
- B. Visualisation de la distribution.....103

FIGURE 20 : RÉF. IMG (6460-0932-9264).....105

Visualisation de l'espérance mathématique comme centre d'équilibre d'une dist.....105

- C. Scénarios et Exercices.....105

CHAPITRE 6 : PARAMÈTRES DE DISPERSION : VARIANCE ET ÉCART-TYPE.....108

6.1. Notion de Dispersion et d'Écart.....108

- a. L'illusion de la moyenne.....108
- A. Les Limites de la Moyenne : Une Histoire de Notes.....108

FIGURE 21 : RÉF. IMG (7779-2352-7703).....110

Tableau comparatif des notes de deux élèves avec une moyenne identique.....110

- B. La Dispersion : Quantifier l'Étalement.....110

FIGURE 22 : RÉF. IMG (6241-2662-5343).....112

Représentation graphique de deux séries de données avec des dispersions diffé.....112

- Anecdote : Le Pêcheur de Matadi et la Stabilité.....112

6.2. La Variance : Définition et Calcul.....114

- a. Au-delà de la moyenne.....114
- A. Définition conceptuelle de la variance.....114

FIGURE 23 : RÉF. IMG (6451-4988-5064)....117

Dispersion des notes de deux élèves avec la même moyenne de 10/20....117

- B. Formules de calcul....117

FIGURE 24 : RÉF. IMG (3104-4028-2967)....120

Étapes visuelles du calcul de la variance pour une série simple....120

- C. Scénarios et Exercices....120

6.3. L'Écart-Type : Unité et Interprétation....122

- a. Une question d'unité....122
- A. L'Écart-Type, une Unité Cohérente....122
- B. Interpréter la valeur de l'écart-type....123

FIGURE 25 : RÉF. IMG (6216-7476-8687)....125

Comparaison visuelle de deux distributions avec des écarts-types différents....125

- b. L'anecdote du pêcheur de l'Équateur....125

6.4. Propriétés de la Dispersion et Standardisation....127

- a. L'illusion de la moyenne....127
- A. Les propriétés fondamentales de la variance....127
- B. La standardisation : Créer une échelle universelle....128

FIGURE 26 : RÉF. IMG (4269-4529-8616)....131

Visualisation de la standardisation sur deux distributions de notes....131

- Scénarios et Exercices....131
- Une question de semences au Kwilu....131

CHAPITRE 7 : COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES (INTRODUCTION)....134

7.1. Lois Conjointes et Marginales....134

- a. Le tout et la partie....134
- A. La Loi de Probabilité Conjointe....134

FIGURE 27 : RÉF. IMG (5599-2174-2346)....136

Tableau à double entrée illustrant une loi de probabilité conjointe....136

- B. Les Lois de Probabilité Marginales....136

7.2. Indépendance de Variables Aléatoires....139

- a. La confusion à éviter....139
- A. Définition Formelle de l'Indépendance....139

FIGURE 28 : RÉF. IMG (1575-9678-7830)....142

Représentation schématique de l'indépendance versus la dépendance de deux var....142

- B. Indépendance, Covariance et Corrélation....142

FIGURE 29 : RÉF. IMG (3192-3184-8829)....145

Flux logique de la relation entre indépendance, covariance et corrélation....145

- C. Scénarios et Exercices....145

7.3. Covariance et Corrélation (Aperçu)....148

- a. Le lien invisible des phénomènes....148
- A. La Covariance : Mesurer la Direction du Mouvement Commun....148
- B. Le Coefficient de Corrélation : Standardiser la Force du Lien....148

FIGURE 30 : RÉF. IMG (9276-8619-4008)....151

Nuages de points illustrant différents types de corrélation linéaire....151

- SCÉNARIOS ET EXERCICES....151

7.4. Somme et Différence de Variables Indépendantes....153

- a. L'addition des hasards....153
- A. L'espérance de la somme et de la différence....153
- B. La variance de la somme et de la différence (variables indépendantes)....154

FIGURE 31 : RÉF. IMG (1019-0289-8752)....156

Schéma illustrant la combinaison des espérances et des variances....156

- b. Le paradoxe du pêcheur de Mbandaka....156

PARTIE 3 : LOIS DE DISTRIBUTION ET APPLICATIONS....159

De la donnée brute à la structure....159

Qu'est-ce qu'une "loi" en statistique ?....159

Le monde du dénombrable et de l'infiniment divisible....159

Modéliser pour prévoir : le but ultime....159

CHAPITRE 8 : ÉPREUVES DE BERNOULLI ET SCHÉMA DE BERNOULLI....160

8.1. L'Épreuve de Bernoulli....160

- a. L'intuition fondamentale....160
- A. Définition et Paramètre....160

FIGURE 32 : RÉF. IMG (1250-3540-6528)....162

Visualisation d'une Épreuve de Bernoulli : Le Lancer de Pièce....162
- B. Variable Aléatoire de Bernoulli....162

FIGURE 33 : RÉF. IMG (2262-0780-0814)....165

Codage Numérique de l'Issue d'une Épreuve : Succès=1, Échec=0....165
- L'anecdote de la pêche au lac Maï-Ndombe....165

8.2. Répétition d'Épreuves et Indépendance....167
- a. Le souvenir d'une pièce de monnaie....167
- A. Les conditions d'identité et d'indépendance....167
- B. Formalisation du concept....168
- SCÉNARIOS ET EXERCICES....168

8.3. Construction de l'Arbre de Probabilité Binomial....170
- a. L'arbre qui calcule l'avenir....170
- A. Principes de construction....170

FIGURE 34 : RÉF. IMG (7574-4551-6244)....172

Structure d'un arbre de probabilité pour trois épreuves successives (n=3)....172
- B. Pondération et calcul des chemins....172

FIGURE 35 : RÉF. IMG (9341-4363-4326)....174

Arbre de probabilité pondéré avec p pour le succès (S)....174
- Scénarios et Exercices....174

8.4. Variable Aléatoire Binomiale....176
- a. La logique du comptage....176
- A. Définition et Paramètres....177
- B. Loi de Probabilité Binomiale....177

FIGURE 36 : RÉF. IMG (0630-6506-1340)....179

Distribution de probabilité d'une loi binomiale pour n=10 et p=0.5....179
- C. Espérance et Variance....179

CHAPITRE 9 : LA LOI BINOMIALE....182

9.1. Formule de la Loi Binomiale....182
- a. Introduction : La logique du succès ou de l'échec....182
- A. L'épreuve de Bernoulli : Le socle binaire....182

FIGURE 37 : RÉF. IMG (9738-4176-3114)....184

Arbre de probabilités illustrant la répétition d'une épreuve de Bernoulli.....184
- B. La formule générale de la loi binomiale.....184

FIGURE 38 : RÉF. IMG (6393-2993-1568).....187

Graphique en barres montrant une distribution de probabilité binomiale.....187
- C. Conditions d'application.....187

9.2. Paramètres de la Loi Binomiale.....189
- L'art de prédire la moyenne.....189
- A. L'espérance mathématique (La moyenne).....190
- B. La variance et l'écart-type.....190

FIGURE 39 : RÉF. IMG (9248-5993-0102).....191

Visualisation de l'influence des paramètres n et p sur la distribution.....191
- Scénarios et Exercices.....191
- Anecdote : La pêche miraculeuse de Papa Mbuta.....191

9.3. Formes de la Distribution Binomiale.....193
- a. La forme, une question de probabilité.....193
- A. La Symétrie Parfaite (p = 0.5).....194

FIGURE 40 : RÉF. IMG (2127-9228-6725).....196

Distribution binomiale symétrique pour p = 0.5 et n = 20.....196
- B. L'Asymétrie (p ≠ 0.5).....196

FIGURE 41 : RÉF. IMG (5963-0452-6745).....198

Distributions binomiales asymétriques pour p = 0.2 et p = 0.8.....198
- b. Scénarios et Exercices.....198

9.4. Calculs de Probabilités Cumulées.....200
- a. Le besoin de sommer les chances.....200
- A. Définition de la Probabilité Cumulée.....200

FIGURE 42 : RÉF. IMG (5792-4868-7070).....202

Histogramme d'une loi binomiale illustrant une probabilité cumulée.....202
- B. Les Quatre Cas de Figure du Calcul Cumulé.....202

FIGURE 43 : RÉF. IMG (6400-0590-7064).....205

Tableau synthétique des quatre formules de calcul de probabilités cumulées.....205

- Scénarios et Exercices.....205
- Une histoire de pêche sur le fleuve Congo.....205

CHAPITRE 10 : APPLICATIONS CONTEXTUALISÉES DE LA STATISTIQUE.....208

10.1. Applications en Contrôle de Qualité.....208
- a. L'œil statistique sur la production.....208
- A. Le principe de l'échantillonnage de contrôle.....208
- B. Les Limites de Contrôle (LC).....208

FIGURE 44 : RÉF. IMG (7748-1202-1755).....211

Carte de contrôle typique pour le suivi de la production industrielle.....211
- C. Scénarios et Exercices.....212

10.2. Applications en Génétique et Santé.....214
- a. Des petits pois à l'ADN.....214
- A. La Loi de Hardy-Weinberg comme modèle statistique.....214
- B. L'Analyse de Risque en Santé Publique.....215
- SCÉNARIOS ET EXERCICES.....216

10.3. Problèmes de Démographie et Société.....218
- a. Le poids des nombres.....218
- A. La Pyramide des Âges : Radiographie d'une Population.....219
- B. Les Indicateurs Dynamiques : Natalité, Mortalité et Croissance.....220

FIGURE 45 : RÉF. IMG (8958-1541-3940).....221

Comparaison des taux de natalité et de mortalité entre deux provinces.....221
- b. Scénarios et Exercices.....221

10.4. Introduction à la Prise de Décision Statistique.....223
- a. Le pari de l'agronome.....223
- A. Les Deux Hypothèses Fondamentales.....223

FIGURE 46 : RÉF. IMG (1869-7853-0232).....226

Visualisation des zones d'acceptation et de rejet d'une hypothèse.....226
- B. Le Risque d'Erreur et le Seuil de Significativité ().....226

ANNEXES.....230

Tableaux Statistiques Usuels.....230
- A. Tableau de Distribution de Fréquences.....230

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

- B. Tableau de Contingence (ou Tableau Croisé)....231
- C. Tableau d'Analyse de la Variance (ANOVA)....232

Formulaire Récapitulatif....233
- A. Statistique Descriptive à Une Variable....233
- B. Statistique Descriptive à Deux Variables....235
- C. Calcul des Probabilités....235
- D. Lois de Probabilité Usuelles....236

Glossaire des Termes Statistiques....237
- A. Concepts Fondamentaux et Vocabulaire....237
- B. Indicateurs de Statistique Descriptive....239
- C. Fondamentaux des Tests d'Hypothèses....240

Recueil d'Exercices Types et Corrigés....241
- A. Fondamentaux des Variables Aléatoires....241
- B. Répertoire des Lois de Probabilité Usuelles....243
- C. Théorèmes Asymptotiques et Inférence....244

PRÉLIMINAIRES

Note Pédagogique et Objectifs du Cours

1. Approche Pédagogique

1.1. Primauté du Raisonnement sur le Calcul

Cet ouvrage ancre la statistique dans le raisonnement scientifique. L'enseignement privilégie la démarche hypothético-déductive : formuler une hypothèse, la modéliser, la tester et interpréter le résultat. La mémorisation brute des formules est subordonnée à la compréhension de leur fonction dans la résolution de problèmes concrets. Chaque concept est systématiquement appliqué pour construire une intuition analytique durable.

1.2. Didactique de l'Interprétation

L'accent est mis sur la compétence interprétative. Un résultat statistique n'a de valeur qu'à travers l'analyse critique de sa signification, de sa portée et de ses limites. Les exercices visent à développer la capacité de l'élève à traduire un chiffre en une conclusion argumentée, contextualisée et nuancée. La finalité est de former des esprits capables d'utiliser les données pour décider et non seulement pour calculer.

2. Objectifs d'Apprentissage

2.1. Maîtrise des Outils Fondamentaux

Au terme de ce cours, l'élève doit maîtriser l'organisation et la représentation des séries statistiques à une et deux variables. Il doit pouvoir calculer et interpréter avec aisance les indicateurs de position, de dispersion et de forme. Les concepts fondamentaux des probabilités et des lois usuelles (discrètes et continues) doivent être acquis comme des prérequis à l'inférence statistique.

2.2. Développement de l'Autonomie Analytique

Cette maîtrise technique vise une autonomie intellectuelle. L'objectif ultime est de permettre à l'élève de choisir l'outil statistique approprié face à une problématique issue des sciences expérimentales. Il doit être capable de mener une analyse de bout en bout, de la critique des données initiales à la communication claire et rigoureuse de ses conclusions.

Profil d'Entrée

1. Socle Algébrique et Analytique

Une maîtrise solide des fondamentaux algébriques est attendue chez l'élève abordant ce programme. Cette compétence inclut la manipulation d'expressions littérales, la résolution d'équations et d'inéquations du premier et du second degré. Une familiarité avec la notation sommatoire ($ $) et le calcul de pourcentages est également un prérequis non négociable pour quantifier les phénomènes statistiques. La capacité à modéliser une situation simple par une fonction affine est fondamentale.

2. Maîtrise des Outils de Représentation

La capacité à traduire des données numériques en représentations graphiques est un acquis essentiel. L'enseignant s'assurera de l'aisance de l'élève dans la construction et l'interprétation de diagrammes en bâtons, d'histogrammes et de polygones de fréquences. Cette compétence visuelle et analytique constitue le point d'ancrage pour l'étude des séries statistiques à une variable. L'aptitude à lire et extraire une information d'un tableau à double entrée est également supposée.

3. Raisonnement Logico-Déductif

Au-delà de la technique calculatoire, la statistique requiert une posture intellectuelle spécifique. L'élève doit faire preuve de rigueur dans le raisonnement hypothético-déductif. Il est apte à formuler une conjecture simple à partir d'un ensemble de données brutes et à suivre une démarche logique pour en vérifier la validité. Cette aptitude à passer de l'observation concrète à une abstraction mathématique simple est le véritable indicateur de préparation à ce cours.

Compétences Visées

L'achèvement du programme de statistique en 4ème année scientifique dote l'élève d'un ensemble articulé de compétences. Ces dernières transcendent la simple restitution de formules. Elles structurent une pensée apte à quantifier, analyser et interpréter le réel. La finalité est de former un esprit scientifique capable d'utiliser l'outil statistique comme un levier de connaissance et d'aide à la décision.

1. Maîtrise des Outils Conceptuels et Opératoires

L'élève acquiert une définition précise et opératoire des concepts clés : population, échantillon, variable, modalité, ainsi que les principaux indicateurs de tendance centrale, de dispersion et de corrélation. Il exécute avec rigueur les algorithmes de calcul statistique, manuellement ou à l'aide d'une calculatrice, en garantissant l'exactitude des résultats.

2. Développement des Aptitudes Analytiques

Il traduit un problème du réel, formulé en langage courant, en un modèle statistique pertinent. L'élève dépasse le simple calcul pour attribuer une signification concrète aux indicateurs. Une variance élevée ou un coefficient de corrélation proche de -1 ne sont plus des abstractions numériques, mais des informations qualifiant un phénomène observable.

3. Capacité de Synthèse et de Communication

L'élève apprend à structurer un raisonnement statistique complet. Il part de la collecte et de l'organisation des données, procède à leur traitement et aboutit à une conclusion argumentée. Il maîtrise les conventions de la communication scientifique : présentation des résultats sous forme de tableaux normalisés et de graphiques adéquats (histogrammes, diagrammes en boîte, nuages de points).

Partie 1 : FONDEMENTS DU CALCUL DES PROBABILITÉS

a. Quantifier l'incertitude

Le hasard gouverne de nombreux événements. La pluie tombera-t-elle demain à Bukavu ? Un client achètera-t-il ce produit précis ? Le calcul des probabilités fournit un langage mathématique pour mesurer cette incertitude. Il transforme une intuition ou une supposition vague en une valeur numérique précise, comprise entre 0 (impossible) et 1 (certain). Cette quantification est la première étape pour prendre des décisions rationnelles face à l'imprévu.

b. L'origine ludique d'une science rigoureuse

Historiquement, l'étude des probabilités naît de questions posées par des joueurs. Des nobles du 17ème siècle cherchaient à connaître leurs chances de gagner aux jeux de dés ou de cartes. Ces interrogations, d'abord perçues comme frivoles, ont poussé des mathématiciens comme Blaise Pascal et Pierre de Fermat à développer un cadre formel. Une science exacte est ainsi née d'une tentative de maîtriser la fortune d'une partie de Ludo à Kisangani.

c. Le vocabulaire de l'aléatoire

La description d'un phénomène aléatoire exige un vocabulaire spécifique et rigoureux. Des termes comme "expérience aléatoire", "univers des possibles" (ou "univers"), "événement" et "loi de probabilité" sont les briques fondamentales de cette discipline. Chaque mot possède une définition mathématique stricte. Maîtriser ce lexique est indispensable pour modéliser correctement une situation, que ce soit le tirage d'une carte ou la panne d'une machine à l'usine de la Gecamines.

d. Un outil essentiel pour l'option scientifique

Au-delà des jeux, le calcul des probabilités est un pilier des sciences modernes. En physique, il décrit le comportement des particules subatomiques. En biologie, il modélise la transmission des gènes d'une génération à l'autre. Un ingénieur au barrage d'Inga l'utilise pour évaluer les risques de défaillance. Pour tout élève de l'option scientifique, cette matière n'est pas une simple curiosité mathématique. C'est un outil fondamental pour comprendre le monde.

Chapitre 1 : Analyse Combinatoire et Dénombrement

1.1. Principes Fondamentaux du Dénombrement

a. Le dénombrement, une sagesse ancestrale

Un des faits les plus surprenants de la pensée humaine est notre besoin de compter avant même de posséder. Un chef de Mbandaka, en Équateur, ne compte pas seulement ses chèvres, mais aussi les chemins possibles pour les mener au pâturage. Cette anticipation du possible est l'essence même du dénombrement.

L'analyse combinatoire n'est donc pas une invention moderne. Elle formalise cette intuition ancestrale. Elle nous donne des outils rigoureux pour quantifier les choix, les arrangements et les sélections. C'est la mathématique de l'organisation et de la stratégie.

A. Le Principe Multiplicatif (ou Principe du Produit)

Fondamentalement, ce principe s'applique quand une opération globale se décompose en plusieurs étapes successives et indépendantes. Si une première étape peut être réalisée de n_1 manières, une deuxième de n_2 manières, et ainsi de suite jusqu'à une k-ième étape de n_k manières, alors l'opération globale peut être réalisée de N manières.

Le nombre total de possibilités N est le produit des possibilités de chaque étape.

$$N = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$$

Par exemple, un étudiant veut voyager de Kananga à Lubumbashi en passant par Mbuji-Mayi. Il existe 3 routes pour aller de Kananga à Mbuji-Mayi, et 2 routes pour aller de Mbuji-Mayi à Lubumbashi. Le nombre total de trajets possibles est $3 \times 2 = 6$. Pour chaque choix de la première étape, toutes les options de la deuxième sont disponibles.

B. Le Principe Additif (ou Principe de la Somme)

Contrairement au principe multiplicatif, le principe additif gère des choix mutuellement exclusifs. Si une opération peut être réalisée soit d'une manière (parmi n_1 options), soit d'une autre manière (parmi n_2 options), et que ces deux manières ne peuvent pas être choisies simultanément, le nombre total de possibilités N est la somme des possibilités.

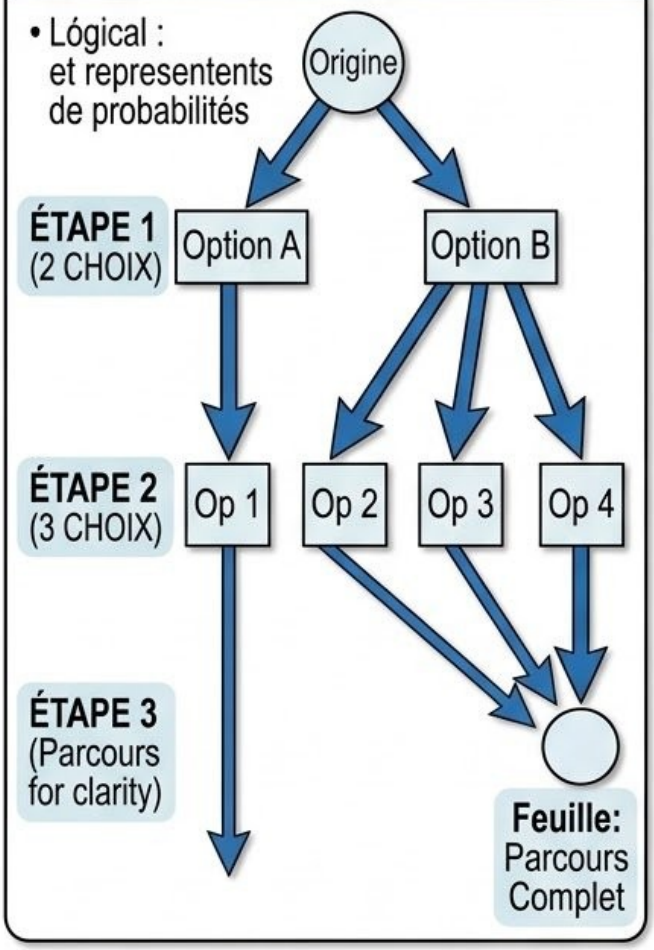
$$N = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

Imaginons un élève à Matadi qui veut acheter un seul fruit au marché. Le vendeur propose soit 3 variétés de mangues, soit 4 variétés d'oranges. L'élève choisit une mangue OU une orange, mais pas les deux. Le nombre total de choix de fruits est $3+4=7$. Les ensembles de choix sont disjoints.

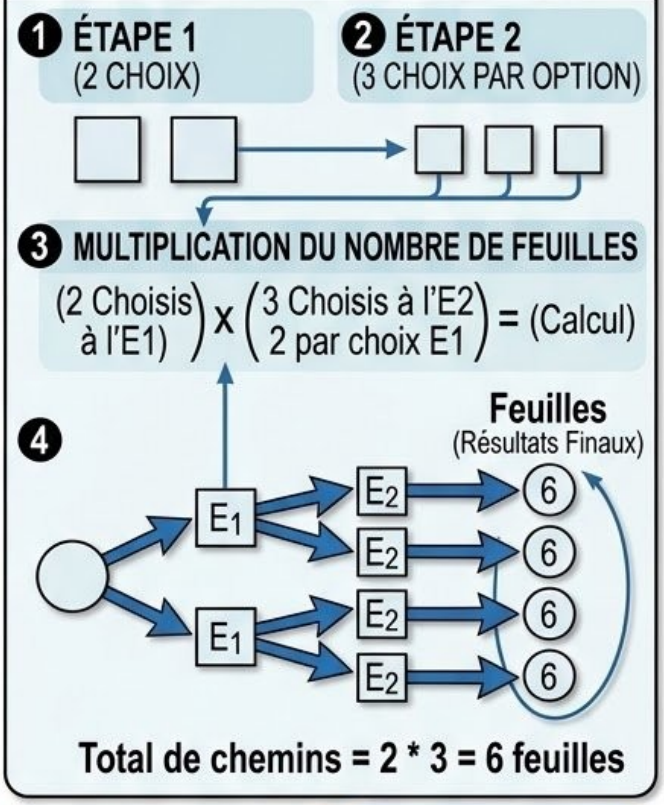
MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

Figure 1 : Réf. IMG (7556-2923-1591) **Arbre des possibilités pour un trajet simple de trois étapes**

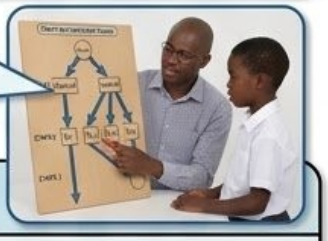
a. Structure de l'Arbre



b. Application du Principe Multiplicatif



• Synthèse de b présentables



c. Différence avec le Principe Additif

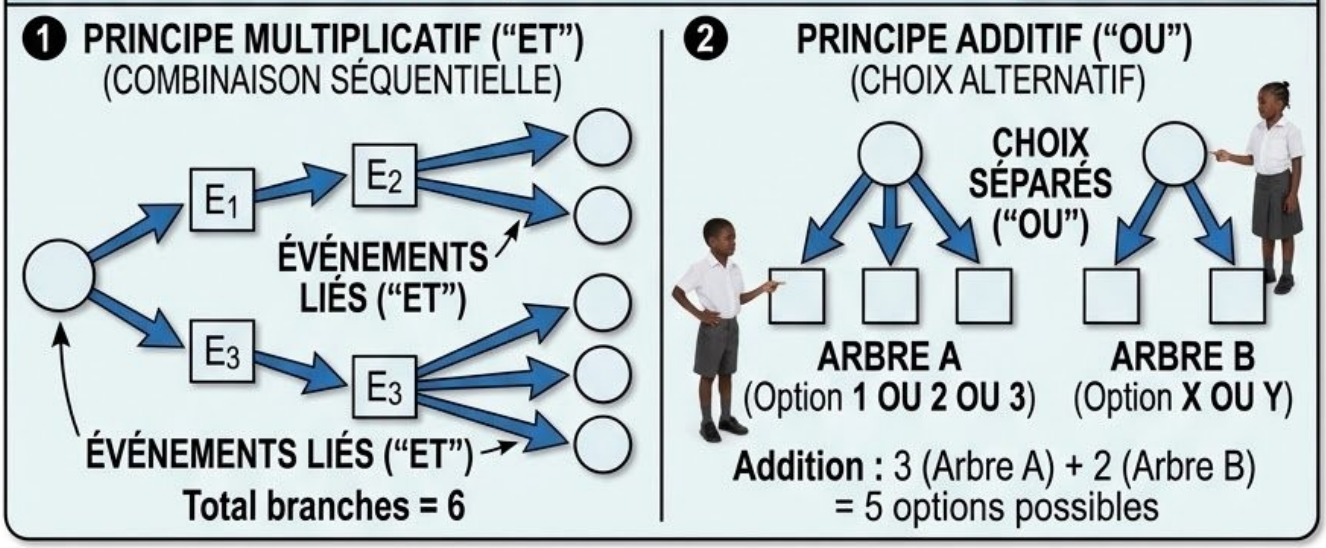


Figure 1 : Réf. IMG (7556-2923-1591)

Arbre des possibilités pour un trajet simple de trois étapes

a. Structure de l'Arbre

L'illustration montre un arbre de décision. Le point de départ (racine) représente l'origine. Chaque niveau de ramification (branche) symbolise une étape de choix. Les premiers embranchements sont les options pour la première étape. De chaque branche partent ensuite des sous-branches, représentant les options de la deuxième étape, et ainsi de suite. Les points finaux (les "feuilles" de l'arbre) matérialisent un parcours complet, une possibilité unique.

b. Application du Principe Multiplicatif

Visuellement, le principe du produit se traduit par le comptage des feuilles de l'arbre. Si la première étape a 2 options (deux branches principales) et que chaque option est suivie d'une deuxième étape à 3 options (trois sous-branches par branche), le nombre total de chemins est le produit du nombre de branches à chaque niveau. On obtient alors $2 \times 3 = 6$ feuilles, soit 6 résultats finaux possibles.

c. Différence avec le Principe Additif

L'arbre illustre une séquence d'événements liés ("ET"). Le principe additif ("OU") ne se représenterait pas par des branches successives sur le même arbre. Il s'agirait plutôt de choisir un chemin sur un premier arbre OU un chemin sur un second arbre complètement séparé. Les choix ne se combinent pas ; ils s'additionnent.

■ ■ ■

C. La distinction cruciale : "ET" contre "OU"

La clé pour choisir le bon principe réside dans la logique de la situation.

- Le mot **"ET"** (ou l'idée de succession d'étapes) implique le **principe multiplicatif**. Il faut choisir une entrée **ET** un plat **ET** un dessert.
- Le mot **"OU"** (ou l'idée d'alternative exclusive) implique le **principe additif**. Il faut choisir une moto **OU** une voiture.

Scénarios et Exercices

Papa Lufimbu, tailleur réputé du quartier Matonge à Kinshasa, ne voit pas des tissus ; il voit des combinaisons. Devant lui, cinq pagnes de luxe venus de Goma et quatre types de broderies différentes apprises lors d'un voyage à Bukavu. Une cliente importante du Kwilu arrive demain. Elle veut une tenue unique. Combien de modèles distincts peut-il proposer en combinant un seul pagne et un seul type de broderie ? Sans le savoir, Papa Lufimbu ne fait pas de la couture. Il fait de l'analyse combinatoire. Chaque matin, en pensant à ses créations, il résout un problème de dénombrement pour éblouir sa clientèle. Son art n'est pas seulement dans l'aiguille, mais aussi dans le calcul mental des possibilités.

Exercice 1 : Composition d'un menu à l'UNIKIN

Énoncé : Un restaurant universitaire propose un menu composé d'une entrée, d'un plat principal et d'un dessert. Il y a 3 choix d'entrées, 4 choix de plats principaux et 2 choix de desserts. Combien de menus complets différents un étudiant peut-il composer ?

Résolution pas-à-pas :

1. **Étape 1 : Identifier les étapes successives** La composition d'un menu complet exige de faire un choix pour l'entrée, **ET** un choix pour le plat, **ET** un choix pour le dessert. La logique est multiplicative.
2. **Étape 2 : Dénombrer les options pour chaque étape**
   - Nombre de choix pour l'entrée (n_1) : 3
   - Nombre de choix pour le plat principal (n_2) : 4
   - Nombre de choix pour le dessert (n_3) : 2
3. **Étape 3 : Appliquer le principe multiplicatif** Le nombre total de menus différents est le produit des options à chaque étape.

$$N = n_1 \times n_2 \times n_3 = 3 \times 4 \times 2 = 24$$

Il y a 24 menus complets différents possibles.

Exercice 2 : Choix de transport à Kisangani

Énoncé : Un fonctionnaire de la Province Orientale doit se rendre de son hôtel au bureau du gouvernorat. Il a le choix entre prendre un taxi-moto **OU** un taxi-voiture. Il y a 5 taxi-motos qui attendent devant l'hôtel. Pour les taxi-voitures, deux compagnies sont disponibles : la compagnie "Fleuve Congo" avec 3

voitures et la compagnie "Boyoma" avec 4 voitures. Combien d'options de transport uniques le fonctionnaire a-t-il ?

Résolution pas-à-pas :

1. **Étape 1 : Identifier les choix principaux (mutuellement exclusifs)** Le choix fondamental est entre un taxi-moto **OU** un taxi-voiture. Cette structure indique l'utilisation du principe additif.
2. **Étape 2 : Dénombrer les options pour le premier choix (taxi-motos)** Le nombre d'options de taxi-motos est de 5.
3. **Étape 3 : Dénombrer les options pour le second choix (taxi-voitures)** Pour choisir une voiture, le fonctionnaire peut prendre une voiture de la compagnie "Fleuve Congo" **OU** de la compagnie "Boyoma". C'est un principe additif interne au choix "voiture". Nombre de voitures = (Voitures "Fleuve Congo") + (Voitures "Boyoma") = $3+4=7$.
4. **Étape 4 : Appliquer le principe additif final** Le nombre total d'options de transport est la somme des options de moto et des options de voiture.

$$N=(\text{nombre de motos})+(\text{nombre de voitures})=5+7=12$$

Le fonctionnaire a 12 options de transport uniques.

1.2. Arrangements et Permutations

a. L'ordre, ce détail qui change tout

Pendant la formation du comité des élèves d'un lycée de Mbandaka, le choix des trois membres (A, B, C) ne dépend pas de l'ordre. Le groupe {A, B, C} est identique au groupe {C, B, A}. Ici, l'ordre est sans importance.

Maintenant, si ces trois élèves doivent occuper les postes de président, vice-président et trésorier, l'ordre devient capital. La distribution (Président=A, VP=B, Trésorier=C) n'est plus la même que (Président=C, VP=B, Trésorier=A). Ce concept d'ordre fonde la distinction entre les combinaisons et les arrangements.

A. L'Arrangement : quand l'ordre compte

Un arrangement est une collection ordonnée d'objets. La position de chaque élément est significative. On distingue deux cas principaux.

a. Arrangement sans répétition

Il s'agit de choisir p éléments parmi n éléments disponibles, sans pouvoir réutiliser un élément déjà choisi. L'ordre du tirage est crucial. Le nombre d'arrangements sans répétition de p éléments pris parmi n est noté A_n^p.

Sa formule est :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Par exemple, le nombre de façons de choisir un président et un secrétaire parmi 10 personnes est un arrangement de 2 parmi 10. L'ordre (qui est président, qui est secrétaire) change le résultat. Le calcul donne $A_{10}^2 = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = 10 \times 9 = 90$ duos dirigeants possibles.

b. Arrangement avec répétition

Dans ce cas, un même élément peut être choisi plusieurs fois. Le nombre d'arrangements avec répétition de p éléments choisis parmi n est simplement n^p.

Un exemple concret est un cadenas à 3 chiffres (de 0 à 9). Il y a $n=10$ chiffres possibles pour $p=3$ positions. Le nombre de codes est $10^3 = 1000$.

B. La Permutation : l'arrangement total

Une permutation est un cas particulier d'arrangement. C'est un arrangement de n éléments pris parmi n. Autrement dit, on ordonne la totalité des éléments d'un ensemble.

a. Permutation sans répétition

Le nombre de manières d'ordonner n objets distincts est noté P_n. Sa formule découle de celle des arrangements, avec $p=n$.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

(Rappel : par convention, $0!=1$).

MURHULA BAZIKANGE M.
Directeur Editorial
+243 860 655 590

Classer 5 athlètes sur un podium revient à calculer $P_5 = 5! = 120$ ordres d'arrivée possibles.

b. Permutation avec répétition

Lorsque certains éléments de l'ensemble sont identiques, on parle de permutation avec répétition. C'est le cas des anagrammes d'un mot contenant des lettres répétées.

La formule s'ajuste pour éliminer les doublons créés par les éléments identiques :

$$P_n^{(n_1, n_2, \ldots, n_k)} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

Ici, n est le nombre total d'éléments, et $n_1, n_2, \ldots, n_k$ sont les effectifs de chaque groupe d'éléments identiques.

Pour le mot "KISANGANI", il y a $n = 9$ lettres. Les répétitions sont : I (2 fois), S (2 fois), A (2 fois), N (2 fois). Le nombre d'anagrammes est $\frac{9!}{2! \times 2! \times 2! \times 2!} = \frac{362880}{16} = 22680$.

SCÉNARIOS ET EXERCICES

Anecdote : la sagesse du transporteur

Papa Wembo, dans sa sagesse, chantait que chaque chose a son temps. En analyse combinatoire, on dirait que chaque chose a sa place. Un commerçant de Gemena, dans la province du Sud-Ubangi, a failli perdre une importante cargaison de maïs. Il avait noté le numéro de son transporteur sur un bout de papier, mais l'encre avait bavé, rendant l'ordre des deux derniers chiffres illisible : 081…45 au lieu de 081…54. Pour lui, ce n'était qu'un détail. Pour le réseau téléphonique, c'est un autre abonné. Il a dû tester les deux possibilités avant de joindre la bonne personne. Cet incident illustre parfaitement qu'en matière d'arrangements, permuter deux éléments crée une réalité entièrement nouvelle et distincte.

Exercice 1 : Le podium du tournoi de lutte à Kananga

Énoncé : Un tournoi de lutte traditionnelle à Kananga rassemble 8 finalistes. On souhaite récompenser les trois premiers avec des médailles d'or, d'argent et de bronze. Combien de podiums différents sont possibles ?

Résolution pas-à-pas :

1. **Étape 1 : Identifier la nature du problème** L'ordre est crucial : la médaille d'or est différente de celle d'argent. Les lutteurs sont distincts et ne peuvent occuper qu'une seule place. Il s'agit d'un arrangement sans répétition de $p=3$ athlètes parmi $n=8$.
2. **Étape 2 : Appliquer la formule de l'arrangement** La formule adéquate est $A_n^p=\frac{n!}{(n-p)!}$.
3. **Étape 3 : Calculer le résultat** On remplace n par 8 et p par 3.

$$A_8^3=\frac{8!}{(8-3)!}=\frac{8!}{5!}=\frac{8\times7\times6\times5!}{5!}=8\times7\times6=336$$

Il y a 336 podiums possibles.

Exercice 2 : L'organisation des caisses de bière à Boma

Énoncé : Un tenancier de bar à Boma doit empiler 6 caisses de bières de marques différentes pour un inventaire : Skol, Primus, Nkoyi, Tembo, Doppel, Beaufort. De combien de manières peut-il les aligner sur son étagère ?

Résolution pas-à-pas :

1. **Étape 1 : Analyser la situation** On doit ordonner 6 objets distincts (les marques sont différentes). Il s'agit de trouver tous les ordres possibles pour la totalité de l'ensemble. C'est une permutation sans répétition.
2. **Étape 2 : Déterminer la formule** La formule de la permutation de n objets est $P_n=n!$.
3. **Étape 3 : Effectuer le calcul** Ici, $n=6$.

$$P_6=6!=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$$

Il peut aligner ses caisses de 720 manières différentes.

1.3. Combinaisons et Coefficients Binomiaux

a. Le problème du choix sans ordre

Même si le mot "combinaison" est utilisé au quotidien pour des codes de cadenas, son sens mathématique est différent. Un code de cadenas (4-7-2) est un arrangement, car l'ordre des chiffres importe crucialement. Une permutation des chiffres ne déverrouillera pas le cadenas.

La véritable combinaison statistique se désintéresse totalement de l'ordre. Elle répond à la question : "De combien de manières puis-je choisir un groupe ?". Former un comité de 3 personnes parmi 10 est une combinaison. L'important est de savoir qui est dans le comité, pas dans quel ordre les membres ont été nommés.

A. Définition et Formule de la Combinaison

Une combinaison est un choix de k éléments parmi un ensemble de n éléments, où l'ordre de sélection n'a aucune importance. Ce choix est aussi appelé un sous-ensemble de taille k. Le nombre de combinaisons possibles est noté C_n^k ou, plus fréquemment en contexte universitaire, $\binom{n}{k}$.

La formule pour calculer ce nombre est :

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Cette formule s'interprète logiquement. Le terme $\frac{n!}{(n-k)!}$ représente le nombre d'arrangements de k éléments parmi n. Puisque l'ordre ne compte pas, nous divisons ce résultat par $k!$, qui est le nombre de manières de permuter (d'ordonner) les k éléments choisis.

Par exemple, pour choisir un duo de délégués ($k=2$) dans un groupe de 4 élèves ($n=4$) :

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$$

Il y a 6 duos possibles.

B. Coefficients Binomiaux et Triangle de Pascal

Les nombres C_n^k portent le nom de "coefficients binomiaux". Ils apparaissent lors du développement de puissances d'un binôme comme $(a+b)^n$.

La relation fondamentale est donnée par la formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Les coefficients $\binom{n}{k}$ sont précisément les nombres que l'on trouve dans le Triangle de Pascal.

Figure 2 : Réf. IMG (0236-2146-3344)

Structure visuelle du Triangle de Pascal
et ses propriétés fondamentales

